ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN
Band 6 | Dezember 1926 | Heft 6

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über den Massenausgleich raschumlaufender Körper.

Von **VIKTOR BLAESS** in Darmstadt.

Auf dem Gebiet der Kraft- und Arbeitsmaschinen geht bekanntlich die Entwicklung derart, daß die Kolbenmaschinen verdrängt werden von den rein rotierenden Maschinen mit möglichst hoher Drehzahl. Den Vorteilen dieser raschlaufenden Turbomaschinen, wie Billigkeit, Raum- und Gewichtsersparnis steht u. a. der Nachteil gegenüber, daß sie äußerst empfindlich sind gegen die geringste Verfehlung in bezug auf das Prinzip der freien Achsen. Es stellt sich bei vorkommender »Unbalanz« ein dauerndes Erzittern ein, wodurch besonders im Falle der Resonanz mit dem tragenden Fundament oder der sonstigen Unterlage die Maschine unfähig ist, ihren Dienst ohne Gefahr für sich und ihre Umgebung auch nur für kurze Zeit zu versehen.

Um einen Begriff zu haben von der Wirkung dieser Unbalanz nehme man an, daß der Schwerpunkt eines 3000-tourigen Rotors um den geringen Betrag von $^1/_{10}$ mm exzentrisch verlagert ist. Dann tritt eine Zentrifugalkraft auf, die gleich ist dem Gewicht des rotierenden Körpers, weshalb die Lager bei einem z. B. mittelgroßen Rotor von 10 t Gewicht in 50-maligem Wechsel pro Sekunde Zusatzkräfte von dieser Größe aufzunehmen haben. Hierdurch wird natürlich die Maschine dauernd zu einem unerwünschten Schwingungsherd mit den bekannten unliebsamen Erscheinungen.

Betrachtet man den in seinen Lagern sich drehenden Körper zunächst als völlig starr, so haben diese nur dann allein das Gewicht zu tragen, wenn die Rotationsachse eine Hauptträgheitsachse ist. Der Konstrukteur verlangt deshalb ausdrücklich von der Werkstätte, daß die Drehachse diese Eigenschaft besitzt und zwar im streng physikalischen Sinne. Trotz der hochentwickelten technischen Hilfsmitteln ist dies bei der werkstattmäßigen Herstellung auch nicht angenähert zu erreichen und man hat deshalb Mittel und Wege gesucht, um durch eine besondere Nachbehandlung des fertigen Rotors dieser Forderung zu entsprechen. — Der zur Rotationsachse ganz wenig verlagerte Körper bestehe aus einem möglichst großen, bezüglich dieser Achse ausgeglichenen Teil und aus einem

kleinen Rest, den Unbalanz- oder Störungsmassen μ. Man bemerkt, daß bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω diese ein System von Zentrifugalkräften liefern, welche sich nach den Lehren der Statik auf zwei in verschiedenen radialen Ebenen liegenden Einzelkräfte $\mu_1 \varrho_1 \omega^2$ und $\mu_2 \varrho_2 \omega^2$ (wo ϱ der Abstand einer Masse von der Drehachse) zurückführen lassen, oder auch auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar. Legt man die Einheit der Winkelgeschwindigkeit zugrunde, so sind also $\mu_1 \varrho_1$ und $\mu_2 \varrho_2$ die den Ruhegang des Rotors störenden Zentrifugalkräfte und es ist klar, daß der Massenausgleich (in der Praxis das Auswuchten genannt) darin besteht, diese »Störungsvektoren« zu entfernen oder ihre Wirkung durch Gegenkräfte, die hier »Tariervektoren« genannt sein mögen, aufzuheben.

1. Die bekannten Massenausgleichverfahren. Es gibt mehrere Verfahren um den Massenausgleich rein rotierender Körper zu erzielen. Das älteste beruht darauf, die Einzelkraft, da sie ja einem exzentrisch sitzenden Gewicht entspricht, durch Auswiegen zu entfernen, indem man die Welle des Körpers auf zwei horizontale Lineale legt, längs deren der Körper, solange das Schweremoment wirkt, rollt. Diese Behandlung allein durchgeführt eignet sich für einen geringtourigen Rotor der scheibenförmig, also von kleiner achsialer Ausdehnung ist. Für ein genaueres Auswuchten muß die durch Reibung verursachte Unempfindlichkeit beseitigt werden, was z. B. durch die Kruppsche Schwerpunktswage erreicht wird, wo der Rotor auf einem in Schneiden gelagerten Rahmen ruht[1]. Handelt es sich um einen trommelförmigen Körper, so ist noch das Störungspaar zu vernichten, das natürlich durch ein Auswiegen nicht zu erfassen ist. Zu diesem Zweck wird der Körper federnd gelagert und mit Hilfe der auftretenden Resonanzschwingungen die Ebene des Störungspaares bei Vorwärts- und Rückwärtslauf ermittelt und dieses austariert[2]. Das Verdienst, einen Weg gezeigt zu haben, um auch die Einzelkraft mittels Schwingungen zu beseitigen, gebührt F. Lawaczeck[3]. Besonders als wichtige Neuerung zu erwähnen ist der sog. Punga-Apparat[4], welcher innerhalb der kürzesten Zeit eine Unbalanzmasse aufzudecken vermag. Die eigenartige Wirkung dieser Vorrichtung beruht auf der Möglichkeit einer raschen Verschiebung einer Ausgleichsmasse bis zur völligen Beruhigung des Körpers.

Bei fertigen Anlagen wird man häufig in die Notwendigkeit versetzt, die rotierenden Teile der Maschine auszuwuchten, auch wenn diese vorher auf das Genaueste ausgeglichen waren. Die Ursache sind Verlagerungen, die auf dem Transport oder später bei Reparaturen eintreten und namentlich solche, die sich beim Betrieb selbst einstellen, weil das werkstattmäßige Auswuchten eben nicht unter den Betriebsbedingungen z. B. hoher Drehzahl, starker, namentlich einseitiger Erwärmung des Rotors usw. vorgenommen werden kann. Da man kaum in der Lage ist, an Ort und Stelle über eine Auswuchtmaschine zu verfügen, welche diesen Bedingungen gerecht wird, so muß wohl oder übel der Massenausgleich des Rotors in seinen eigenen Lagern erfolgen, weshalb z. B. die meisten Großkraftmaschinen bauenden Firmen sich sogenannte »Spezialtarierer« aus dem Kreis ihrer Monteure aussuchen, denen ein gewisses Gefühl für Ueberwuchtmassen nachgesagt wird. Wie schwer allerdings die Kunst des Auswuchtens ist, erkennt man an deren oft große Geduld fordernden Bemühungen um eine auch nur notdürftige Beruhigung der Maschine. — Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist einen Weg zu zeigen, um gerade dieses Auswuchten planmäßig zu gestalten und ferner, gewisse Richtlinien zu geben, die das werkstattmäßige Auswuchten ohne großen Aufwand an besonderen Vorrichtungen ermöglichen. Da zur Beantwortung der nun in Betracht kommenden Fragen vor allen Dingen die Kenntnis des Bewegungsvorganges eines elastisch-gelagerten rotierenden Körpers nötig ist, soll im Folgenden zunächst hierauf näher eingegangen werden.

2. Die Bewegungsgleichungen des starren Rotors bei elastischer Lagerung. Es sei angenommen, daß der starre Rotor auf einer nicht deformierbaren Welle aufgekeilt ist, welche sich mit konstanter großer Winkelgeschwindigkeit ω in zwei nachgiebigen Lagern umdreht, die selbst auf einem absolut starren, ruhenden Fundament befestigt sind. Diese vereinfachende Annahme soll zunächst gemacht werden, um einen Anhaltspunkt zu gewinnen für die spätere Beurteilung der Vorgänge wie sie sich abspielen bei Rotoren mit elastischen Wellen auf nachgiebigen Fundamenten. — Liegt eine Hauptträgheits-

[1] H. Hort, Zeitschrift für Maschinenbau 1923 S. 271.

[2] A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen. 6. Auflage, S. 353.

[3] F. Lawaczeck, Z. f. das ges. Turbinenwesen 1911 S. 433. — E. Heidebroek, VDI-Zeitschrift 1916 S. 11 und 32. — v. Brauchitsch, diese Zeitschrift Bd. 3 (1923), S. 81.

[4] F. Punga, ETZ. 1924 S. 713.

achse des Körpers gerade in der Drehachse, so wird er, abgesehen von Eigenschwingungen, keine andere Bewegung ausführen, als die gleichfömige Rotation. Ist jedoch die Hauptträgheitsachse gegenüber der Drehachse verlagert, liegt sie windschief hierzu, so wird der Rotor offenbar erzwungene Schwingungen machen.

Für kleine Ausschläge, um die es sich grundsätzlich hier immer handeln soll, ist dieser gleichmäßig rotierende Körper mit Rücksicht darauf, daß sein Schwerpunkt angenähert eine ebene Bahn beschreibt, als ein mechanisches System von vier Freiheitsgraden aufzufassen, denen vier Bewegungsgleichungen entsprechen. Um diese zu finden, sei das Lagrangesche Verfahren benutzt, das aus der kinetischen Energie die Differentialgleichungen herzuleiten gestattet. In Abb. 1 bedeutet K den um die Achse $L_1 L_2$ rotierenden Körper, wobei L_1 und L_2 die Mitten seiner beiden Lager sind, die sich bei den angenommenen kleinen Schwingungen in den Ebenen E_1 und E_2 bewegen. Ihre Auslenkungen x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 aus der Ruhelage bestimmen, da sich der Rotor mit gegebener Geschwindigkeit umdreht, dessen Lage zu jeder Zeit. Diese vier Größen, entsprechend den vier Freiheitsgraden des Körpers, sollen deshalb als Systemkoordinaten dienen. Der Körperschwerpunkt S liege in der zur Drehachse senkrechten Koordinatenebene $O\,\xi\,\eta$ des an den Körper gebundenen Systems $O\,\xi\,\eta\,\zeta$. In der Ruhelage falle O nach O_1 und es sei $O_1\,x\,y\,z$ das im Raum feste System, auf das die Bewegung bezogen wird. Sind u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit von O und p, q, r die der Winkelgeschwindigkeit von K hinsichtlich der Achsen $\xi\,\eta\,\zeta$, so ist bekanntlich die kinetische Energie des Körpers

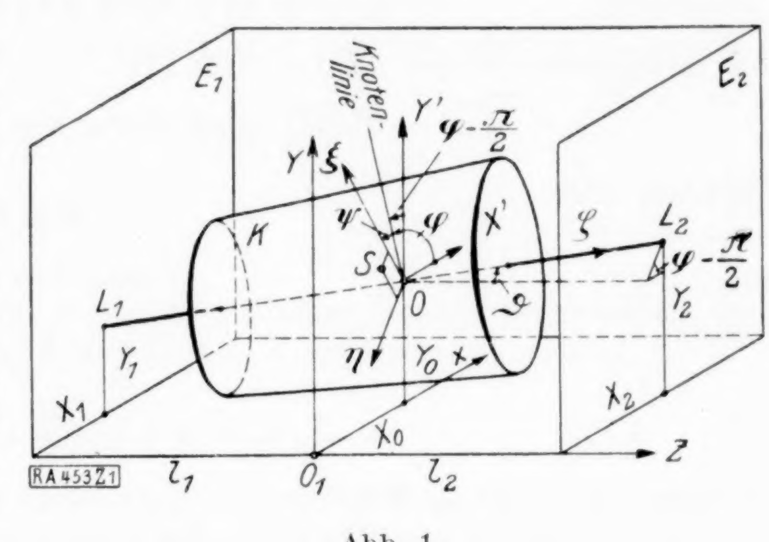


Abb. 1.

$$E_k = \frac{1}{2}\,(A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2 - 2\,D\,q\,r - 2\,E\,r\,p - 2\,F\,p\,q)$$
$$+ m\,[(w\,\eta_s - v\,\zeta_s)\,p + (u\,\zeta_s - w\,\xi_s)\,q + (v\,\xi_s - u\,\eta_s)\,r] + \frac{m}{2}\,(u^2 + v^2 + w^2) \quad . \quad . \quad (1),$$

wo A, B, C und D, E, F seine Trägheits- bzw. Deviationsmomente sind und $\xi_s\,\eta_s\,\zeta_s$ die Koordinaten des Schwerpunktes des Körpers bedeuten.

Um E_k in den Systemkoordinaten auszudrücken, ist es erforderlich, die Geschwindigkeitskoordinaten des Körpers u, v, w, p, q, r mittels jener festzustellen. Bedeuten x_0 und y_0 die Koordinaten von O zur Zeit t und ist $\omega\,t$ der Winkel, den die ξ-Achse mit der x'-Achse einschließt, wo ω die konstante Drehgeschwindigkeit des Rotors, so ist, wie leicht einzusehen:

$$u = \frac{d\,x_0}{d\,t}\cos\omega\,t + \frac{d\,y_0}{d\,t}\sin\omega\,t\,, \qquad v = \frac{d\,y_0}{d\,t}\cos\omega\,t - \frac{d\,x_0}{d\,t}\sin\omega\,t\,, \qquad w = 0.$$

Da
$$\frac{x_2 - x_0}{l_2} = \frac{x_0 - x_1}{l_1}\,, \quad \text{so ist} \quad x_0 = \frac{l_2}{l}\,x_1 + \frac{l_1}{l}\,x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und entsprechend
$$y_0 = \frac{l_2}{l}\,y_1 + \frac{l_1}{l}\,y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

so daß
$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{l}\,(l_2\,\dot{x}_1 + l_1\,\dot{x}_2)\cos\omega\,t + \frac{1}{l}\,(l_2\,\dot{y}_1 + l_1\,\dot{y}_2)\sin\omega\,t \\ v &= \frac{1}{l}\,(l_2\,\dot{y}_1 + l_1\,\dot{y}_2)\cos\omega\,t - \frac{1}{l}\,(l_2\,\dot{x}_1 + l_1\,\dot{x}_2)\sin\omega\,t \\ w &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

durch die Systemkoordinaten bereits ausgedrückt sind.

Bezüglich der Komponenten der Drehgeschwindigkeit bemerkt man, daß p und q, da $\dot{\alpha} = -\frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l}$ und $\dot{\beta} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l}$ als Drehgeschwindigkeitskomponenten des Körpers um die x'- bzw. y'-Achse aufgefaßt werden können, zu schreiben sind:

$$p = \dot{\alpha}\cos\omega\,t + \dot{\beta}\sin\omega\,t\,, \qquad q = \dot{\beta}\cos\omega\,t - \dot{\alpha}\sin\omega\,t.$$

Wegen r hat man, wenn φ, ψ, ϑ die Eulerschen Winkel bedeuten,

$$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta$$

und weil

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} = \omega$$

ist

$$r = \omega - (1 - \cos \vartheta)\, \dot{\varphi}.$$

Aus Abb. 1 folgt

$$x_2 - x_0 = l_2 \sin \vartheta \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = l_2 \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$y_2 - y_0 = l_2 \sin \vartheta \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = - l_2 \sin \vartheta \cos \varphi$$

und mit Rücksicht auf Gl. (2) und (3)

$$\alpha = - \frac{y_2 - y_1}{l} = \sin \vartheta \cos \varphi\,, \qquad \beta = \frac{x_2 - x_1}{l} = \sin \vartheta \sin \varphi .$$

Hiernach wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

und

$$\sin^2 \vartheta = \alpha^2 + \beta^2$$

woraus

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha \dot{\beta} - \beta \dot{\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

und

$$1 - \cos \vartheta = 1 - \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\,,$$

bei Vernachlässigung höherer Potenzen von α und β.

Setzt man diese Werte in die Gleichung für r ein, so kommt

$$r = \omega + \frac{\beta \dot{\alpha} - \alpha \dot{\beta}}{2}.$$

Damit sind auch die Komponenten der Drehgeschwindigkeit in den Systemkoordinaten ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} p &= - \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \sin \omega t \\ q &= \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \cos \omega t + \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} \sin \omega t \\ r &= \omega + \frac{1}{2} \frac{y_2 - y_1}{l} \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} - \frac{1}{2} \frac{x_2 - x_1}{l} \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (5).$$

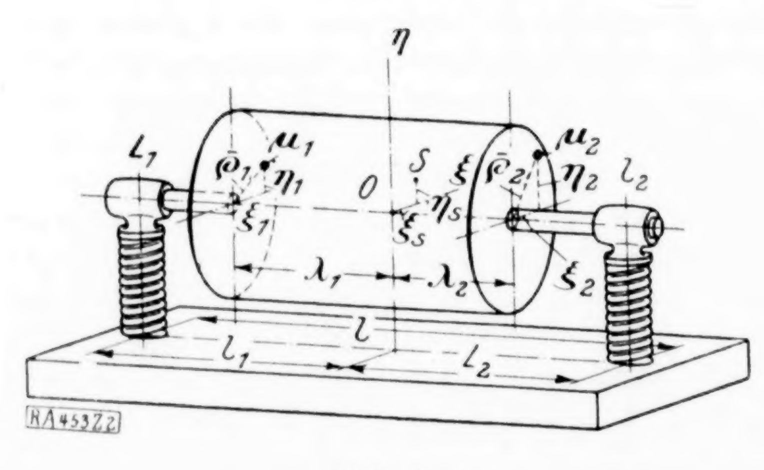


Abb. 2.

Offenbar wird eine dauernde Beunruhigung der Maschine schon durch ganz geringe Verlagerungsmassen hervorgerufen, denen, wie eingangs erwähnt, in zwei radialen Ebenen die Störungsmassen μ_1 und μ_2 in den Abständen ϱ_1 und ϱ_2 von der Achse entsprechen (Abb. 2). Es kann daher bei den in der Praxis fast ausschließlich vorkommenden achsensymmetrischen Rotoren das Trägheitsmoment um die ξ-Achse gleich dem um die η-Achse gesetzt werden, so daß $A = B = T_0$, wo nun T_0 das Trägheitsmoment des Rotors bezüglich einer beliebigen radial verlaufenden Achse durch O bedeutet. Da ohne μ_1 und μ_2 die Gerade $L_1 L_2$ eine Hauptträgheitsachse ist, so erkennt man, daß die Deviationsmomente sind

$$D = \lambda_2 \eta_2 \mu_2 - \lambda_1 \eta_1 \mu_1\,, \qquad E = \lambda_2 \xi_2 \mu_2 - \lambda_1 \xi_1 \mu_1\,, \qquad F = \xi_2 \eta_2 \mu_2 + \xi_1 \eta_1 \mu_1 \quad (6).$$

Mit Rücksicht auf

$$m \xi_s = \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2\,, \qquad m \eta_s = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2\,, \qquad \zeta_s = 0 \quad \ldots (7)$$

sind jetzt alle in Gl. (1) vorkommenden Konstanten durch gegebene Werte dargestellt und die kinetische Energie kann durch diese und die Systemkoordinaten ausgedrückt werden. Setzt man die Geschwindigkeiten nach Gl. (4) und (5) ein in

$$E_k = \frac{1}{2}\left[T_0 (p^2 + q^2) + T_a r^2 - 2 D q r - 2 E p r\right] + m (v \xi_s - u \eta_s) r + \frac{1}{2} m (u^2 + v^2),$$

wo die auf null stehenden Größen weggelassen sind, ebenso der sehr kleine Wert $F p q$ und wo T_a an Stelle von C das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse ist, so erhält man

$$\begin{aligned} E_k = {} & \frac{T_0}{2}\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l}\right)^2 + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} T_a \omega^2 + \frac{1}{2} T_a \omega \frac{y_2 - y_1}{l} \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \\ & - \frac{1}{2} T_a \omega \frac{x_2 - x_1}{l} \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} - D \omega \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \cos \omega t - D \omega \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} \sin \omega t \\ & + E \omega \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l} \cos \omega t - E \omega \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \sin \omega t + m \xi_s \omega \frac{l_2 \dot{y}_1 + l_1 \dot{y}_2}{l} \cos \omega t \\ & - m \xi_s \omega \frac{l_2 \dot{x}_1 + l_1 \dot{x}_2}{l} \sin \omega t - m \eta_s \omega \frac{l_2 \dot{x}_1 + l_1 \dot{x}_2}{l} \cos \omega t \\ & - m \eta_s \omega \frac{l_2 \dot{y}_1 + l_1 \dot{y}_2}{l} \sin \omega t + \frac{1}{2} m \left(\frac{l_2 \dot{x}_1 + l_1 \dot{x}_2}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{l_2 \dot{y}_1 + l_1 \dot{y}_2}{l}\right)^2. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung, in welcher nur die quadratischen Terme beibehalten sind, folgen die Bewegungsgleichungen des Rotors z. B. für die Koordinate x_1 gemäß

$$\frac{d}{d t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = K_1.$$

Da bei den kleinen Ausschlägen eines Lagers dessen Rückstellkraft in erster Annäherung linear abhängig vom Ortsvektor sein wird, so sind die Lagrangeschen Kräfte wenn man die Reibung vorläufig nicht berücksichtigt:

$$K_1 = -(c_1 x_1 + c_1' y_1), \qquad K_2 = -(c_2 x_2 + c_2' y_2)$$
$$K_I = -(c_I' x_1 + c_I y_1), \qquad K_{II} = -(c_{II}' x_2 + c_{II} y_2),$$

wobei wegen der potentiellen Energie der federnden Lager natürlich $c_1' = c_I'$ und $c_2' = c_{II}'$ sein muß. Nach Erledigung der Zwischenrechnung erhält man die vier Bewegungsgleichungen des Rotors:

$$\begin{aligned} & m \frac{l_2}{l^2}(l_2 \ddot{x}_1 + l_1 \ddot{x}_2) - m \xi_s \omega^2 \frac{l_2}{l} \cos \omega t + m \eta_s \omega^2 \frac{l_2}{l} \sin \omega t - \frac{T_0}{l^2}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \\ & - T_a \frac{\omega}{l^2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \frac{D \omega^2}{l} \sin \omega t + \frac{E \omega^2}{l} \cos \omega t = -(c_1 x_1 + c_1' y_1) \\ & m \frac{l_1}{l^2}(l_2 \ddot{x}_1 + l_1 \ddot{x}_2) - m \xi_s \omega^2 \frac{l_1}{l} \cos \omega t + m \eta_s \omega^2 \frac{l_1}{l} \sin \omega t + \frac{T_0}{l^2}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \\ & + T_a \frac{\omega}{l^2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \frac{D \omega^2}{l} \sin \omega t - \frac{E \omega^2}{l} \cos \omega t = -(c_2 x_2 + c_2' y_2) \\ & m \frac{l_2}{l^2}(l_2 \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{y}_2) - m \xi_s \omega^2 \frac{l_2}{l} \sin \omega t - m \eta_s \omega^2 \frac{l_2}{l} \cos \omega t - \frac{T_0}{l^2}(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) \\ & + T_a \frac{\omega}{l^2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{D \omega^2}{l} \cos \omega t + \frac{E \omega^2}{l} \sin \omega t = -(c_I' x_1 + c_I y_1) \\ & m \frac{l_1}{l^2}(l_2 \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{y}_2) - m \xi_s \omega^2 \frac{l_1}{l} \sin \omega t - m \eta_s \omega^2 \frac{l_1}{l} \cos \omega t + \frac{T_0}{l^2}(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) \\ & - T_a \frac{\omega}{l^2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \frac{D \omega^2}{l} \cos \omega t - \frac{E \omega^2}{l} \sin \omega t = -(c_{II}' x_2 + c_{II} y_2). \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß sich diese simultanen Differentialgleichungen leicht vereinfachen lassen, wenn man die beiden ersten ebenso die beiden letzten addiert, bzw. sie nach Multiplikation mit l_1 und l_2 subtrahiert, wonach folgt:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{m}{l}(l_2 \ddot{x}_1 + l_1 \ddot{x}_2) + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_1' y_1 + c_2' y_2 = m \xi_s \omega^2 \cos \omega t - m \eta_s \omega^2 \sin \omega t \\ & \frac{m}{l}(l_2 \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{y}_2) + c_I y_1 + c_{II} y_2 + c_I' x_1 + c_{II}' x_2 = m \eta_s \omega^2 \cos \omega t + m \xi_s \omega^2 \sin \omega t \\ & \frac{T_0}{l}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + \frac{T_a \omega}{l}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + c_2 l_2 x_2 - c_1 l_1 x_1 + c_2' l_2 y_2 - c_1' l_1 y_1 = E \omega^2 \cos \omega t - D \omega^2 \sin \omega t \\ & \frac{T_0}{l}(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) - \frac{T_a \omega}{l}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{II} l_2 y_2 - c_I l_1 y_1 + c_{II}' l_2 x_2 - c_I' l_1 x_1 = D \omega^2 \cos \omega t + E \omega^2 \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Diese Beziehungen sind nun unmittelbar der mechanischen Deutung fähig, denn die ersten zwei Gleichungen sprechen den Schwerpunktsatz, die beiden anderen den Momentensatz aus für den massensymmetrischen Rotor, dessen Schwerpunkt in O liegt. Hierbei erscheinen als äußere Kräfte die Lagerrückstellkräfte und die Zentrifugalkräfte, wozu noch in den zwei letzten Gleichungen die von der Kreiselwirkung herrührenden Momente (gyroskopischen Terme) vom Betrag $T_a\,\omega\,\frac{\dot y_2 - \dot y_1}{l}$ und $T_a\,\omega\,\frac{\dot x_2 - \dot x_1}{l}$ kommen. Die Schwerkraft ist natürlich durch die Vorbelastung der Lager als aufgehoben zu betrachten.

3. Die Bewegung des Rotors bei beliebigen Störungskräften. Im Folgenden sei das Feld der Lagerrückstellkräfte symmetrisch zu den Koordinatenachsen angenommen, was praktisch wohl angenähert zutreffen wird, so daß die Glieder mit den Koeffizienten c' in den vorstehenden Differentialgleichungen vernachlässigt werden können. Alsdann ist die Dauerschwingung des Rotors durch die folgenden partikulären Lösungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t\,, & x_2 &= A_2 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t \\ y_1 &= A_I \cos\omega t + B_I \sin\omega t\,, & y_2 &= A_{II} \cos\omega t + B_{II} \sin\omega t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (9).$$

Wie man sich durch Einsetzen dieser Werte in die Bewegungsgleichungen überzeugt, sind die Konstanten A und B

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\omega^2}{a_0}(a_1\, m\, \xi_s - b_1\, E)\,, & B_1 &= -\frac{\omega^2}{a_0}(a_1\, m\, \eta_s - b_1\, D) \\ A_I &= \frac{\omega^2}{a_0}(a_I\, m\, \eta_s - b_I\, D)\,, & B_I &= \frac{\omega^2}{a_0}(a_I\, m\, \xi_s - b_I\, E) \\ A_2 &= \frac{\omega^2}{a_0}(a_2\, m\, \xi_s + b_2\, E)\,, & B_2 &= -\frac{\omega^2}{a_0}(a_2\, m\, \eta_s + b_2\, D) \\ A_{II} &= \frac{\omega^2}{a_0}(a_{II}\, m\, \eta_s + b_{II}\, D)\,, & B_{II} &= \frac{\omega^2}{a_0}(a_{II}\, m\, \xi_s + b_{II}\, E) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (10).$$

wo für a_1, b_1 usw. sich die etwas umständlichen Ausdrücke ergeben:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (h_I k_{II} + h_{II} k_I)\, k_2 + (k_I - k_{II})\, h_2 \frac{T_a\, \omega^2}{l} - (h_I + h_{II}) \frac{T_a^2\, \omega^4}{l^2} \\ a_2 &= (h_I k_{II} + h_{II} k_I)\, k_1 + (k_{II} - k_I)\, h_1 \frac{T_a\, \omega^2}{l} - (h_I + h_{II}) \frac{T_a^2\, \omega^4}{l^2} \\ b_1 &= (h_I k_{II} + h_{II} k_I)\, h_2 - (h_I + h_{II})\, h_2 \frac{T_a}{l}\, \omega^2 \\ b_2 &= (h_I k_{II} + h_{II} k_I)\, h_1 - (h_I + h_{II})\, h_1 \frac{T_a}{l}\, \omega^2 \\ a_I &= (h_1 k_2 + h_2 k_1)\, k_{II} + (k_1 - k_2)\, h_{II} \frac{T_a\, \omega^2}{l} - (h_1 + h_2) \frac{T_a^2\, \omega^4}{l^2} \\ a_{II} &= (h_1 k_2 + h_2 k_1)\, k_I + (k_2 - k_1)\, h_I \frac{T_a\, \omega^2}{l} - (h_1 + h_2) \frac{T_a^2\, \omega^4}{l^2} \\ b_I &= (h_1 k_2 + h_2 k_1)\, h_{II} - (h_1 + h_2)\, h_{II} \frac{T_a}{l}\, \omega^2 \\ b_{II} &= (h_1 k_2 + h_2 k_1)\, h_I - (h_1 + h_2)\, h_I \frac{T_a}{l}\, \omega^2 \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

$$a_0 = (h_1 k_2 + h_2 k_1)(h_I k_{II} + h_{II} k_I) - (h_1 + h_2)(h_I + h_{II}) \frac{T_a^2}{l^2}\, \omega^4 \quad . \; . \; (12).$$

Die h und k bedeuten hierbei:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= c_1 - m \frac{l_2}{l}\, \omega^2\,, & h_I &= c_I - m \frac{l_2}{l}\, \omega^2 \\ h_2 &= c_2 - m \frac{l_1}{l}\, \omega^2\,, & h_{II} &= c_{II} - m \frac{l_1}{l}\, \omega^2 \\ k_1 &= c_1\, l_1 - \frac{T_0}{l}\, \omega^2\,, & k_I &= c_I\, l_1 - \frac{T_0}{l}\, \omega^2 \\ k_2 &= c_2\, l_2 - \frac{T_0}{l}\, \omega^2\,, & k_{II} &= c_{II}\, l_2 - \frac{T_0}{l}\, \omega^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Die Gl. (10) zeigen — wie zu erwarten —, daß die, die Lagerausschläge bestimmenden Größen A und B linear abhängig sind von den Komponenten der Zentrifugalkraft und des Zentrifugalkraftmoments oder auch nach Gl. (6) und (7) linear abhängig von den Komponenten der Störungsvektoren $\mu_1 \varrho_1$ und $\mu_2 \varrho_2$ und daß sie mit diesen verschwinden, so daß schließlich das Auswuchten eines beliebig gelagerten Rotors auch rechnerisch darin besteht, diese Störungsgrößen ausfindig zu machen.

Bei gegebenen Systemkonstanten m, T, l, c und bei bekannten Störungskräften können für jede Drehzahl des Rotors die Ausschläge der Lagermitten L_1 und L_2 gefunden werden. Nach Gl. (9) beschreiben diese Ellipsen, deren Mittelpunkte in den Ruhelagen von L_1 und L_2 liegen. Es ist nun leicht, ein vollständiges Bild von der Bewegung des Körpers zu erhalten, wenn man die Bewegung der Drehachse verfolgt und sich eine Vorstellung macht von der von ihr beschriebenen Regelfläche. Um deren Gleichung zu finden, hat man zu beachten, daß nach Abb. 1 sich verhält

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{z - l_2}{l} \quad \text{und} \quad \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - l_2}{l},$$

woraus

$$x = \frac{x_2 - x_1}{l} z + \frac{x_1 l_2 + x_2 l_1}{l}, \qquad y = \frac{y_2 - y_1}{l} z + \frac{y_1 l_2 + y_2 l_1}{l}.$$

Setzt man für x_1, y_1, x_2, y_2 die Werte nach Gl. (9), so erhält man mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_I &= -\frac{A_{II} - A_I}{l}, & \beta_I &= -\frac{B_{II} - B_I}{l}, & \alpha_{II} &= \frac{A_2 - A_1}{l}, & \beta_{II} &= \frac{B_2 - B_1}{l} \\ \alpha_1 &= \frac{A_1 l_2 + A_2 l_1}{l}, & \beta_1 &= \frac{B_1 l_2 + B_2 l_1}{l}, & \alpha_2 &= \frac{A_I l_2 + A_{II} l_1}{l}, & \beta_2 &= \frac{B_I l_2 + B_{II} l_1}{l} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

die Parameterform der gesuchten Fläche

$$\left.\begin{aligned} x &= (\alpha_1 + \alpha_{II} z) \cos \omega t + (\beta_1 + \beta_{II} z) \sin \omega t \\ y &= (\alpha_2 - \alpha_I z) \cos \omega t + (\beta_2 - \beta_I z) \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und, wenn die Zeit eliminiert wird, die Gleichung in gewöhnlicher Schreibweise:

$$x^2(a_1 z^2 + b_1 z + c_1) + xy(a_2 z^2 + b_2 z + c_2) + y^2(a_3 z^2 + b_3 z + c_3) = e z^4 + f z^3 + g z^2 + h z + k.$$

Diese Regelfläche vierter Ordnung zeigt durch Gl. (15)[1], daß nicht nur die Lagermitten L_1 und L_2, sondern jeder beliebige andere Punkt der Drehachse eine elliptische Bahn um seine Ruhelage beschreibt, wobei unschwer zu erkennen ist, daß in zwei bestimmten Abständen z' und z'' diese Ellipsen je in eine Doppelgerade ausarten. Zur Ermittlung dieser beiden z hat man die Bedingung aufzustellen, daß Gl. (15) eine Gerade ist, was auf die quadratische Gleichung führt:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_{II} z}{\alpha_2 - \alpha_I z} = \frac{\beta_1 + \beta_{II} z}{\beta_2 - \beta_I z}.$$

Zwei Punkte der Drehachse gleiten also längs zweier radialer Geraden nach rein harmonischem Gesetz mit der Kreisfrequenz ω jedoch so, daß diese Schwingungen noch in irgend einer Phase zu einander stehen. Der Rotor bewegt sich also derart, daß seine Wellenachse so zu sagen eine astigmatische Schwingung um die Ruhelage ausführt.

In Abb. 3 ist die Fläche der Achse auf Grund eines Zahlenbeispiels bei beliebig gegebenen Störungskräften (der Deutlichkeit wegen bei stark vergrößerten Ausschlägen) dargestellt. Man erkennt in den Lagerebenen E_1 und E_2 sowie an den Enden der Rotorachse elliptische Schwingungen, während die beiden Achspunkte Z' und Z'' gerade Linien beschreiben, so daß die sonst röhrenartige Fläche hier

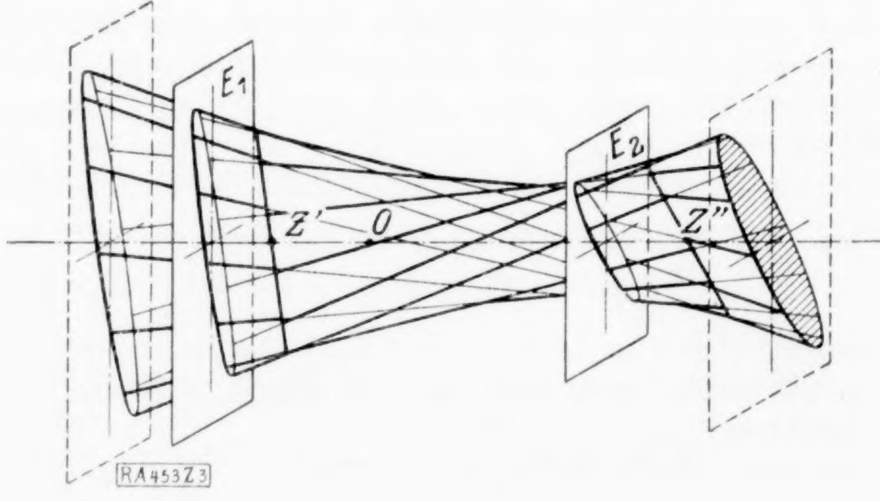


Abb. 3.

[1]) Wodurch sich übrigens die Bewegung eines Achsenpunktes als Uebereinanderlagerung der Schwerpunktsbewegung mit der Schwingbewegung der Achse leicht kennzeichnet. Vergl. auch Abschn. 7.

zusammengequetscht erscheint [1]). Jeder Drehzahl entspricht natürlich eine besondere Achsenfläche und diese ändert z. B. beim langsamen Anfahren der Maschine stetig ihre Gestalt. Für im allgemeinen vier bestimmte Werte von ω werden sämtliche Ausschläge unendlich groß, es liegt dann Resonanz vor. Aus Gl. (12) die in bezug auf ω^2 und damit auf $+\omega$ des Vorwärtslaufs der Maschine vom vierten Grade ist, lassen sich durch Nullsetzen von a_0 die vier kritischen Drehzahlen ohne weiteres ermitteln. Selbstverständlich widersprechen große Ausschläge den hier gemachten Voraussetzungen; die Gebiete um diese kritischen Drehzahlen sind also auszuschalten.

Läuft der Rotor in Lagern, die etwa nur horizontale Schwingungen ausführen, wie z. B. bei den üblichen Auswuchtmaschinen, so ergibt sich ein bemerkenswerter einfacher geometrischer Zusammenhang zwischen den beiden sich jetzt einstellenden kritischen Frequenzen ω_k' und ω_k'' und den kritischen Frequenzen ω_1; ω_I (wenn das Lager 1 ganz fest oder ganz lose ist) und ω_2; ω_{II} (wenn das Lager 2 ganz fest oder ganz lose ist). Die Gl. (12) geht im vorliegenden Fall über in

$$(m\, l_2\, \omega_k^2 - c_1\, l)\left(\frac{T_0}{l}\, \omega_k^2 - c_2\, l_2\right) + (m\, l_1\, \omega_k^2 - c_2\, l)\left(\frac{T_0}{l}\, \omega_k^2 - c_1\, l_1\right) = 0$$

oder in

$$\omega_k^4 - \frac{c_1\, T_1 + c_2\, T_2}{m\, T_0}\, \omega_k^2 + \frac{c_1\, c_2\, l^2}{m\, T_0} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

wo c_1, c_2 die spezifischen Rückstellkräfte von Lager 1 bzw. 2 und T_1, T_2 die Trägheitsmomente des Rotors hinsichtlich einer Vertikalen durch die Mitte des Lagers 1 bzw. 2 sind. Setzt man in Gl. (16) erst c_1 und c_2 unendlich, dann c_1 und c_2 null, so findet man die vier speziellen kritischen Frequenzen

$$\omega_1^2 = \frac{c_2\, l^2}{T_1}, \qquad \omega_2^2 = \frac{c_1\, l^2}{T_2}, \qquad \omega_I^2 = \frac{c_2\, T_2}{m\, T_0}, \qquad \omega_{II}^2 = \frac{c_1\, T_1}{m\, T_0}.$$

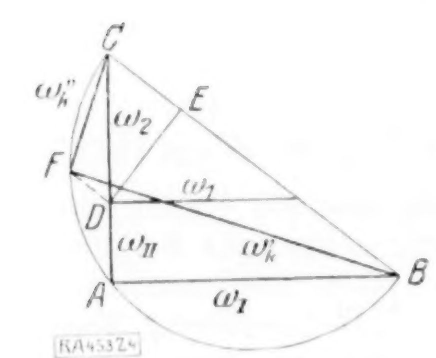


Abb. 4.

Addiert man ω_I^2 und ω_{II}^2, so erhält man den Koeffizienten von ω_k^2 in Gl. (16), so daß

$$\omega'^2_k + \omega''^2_k = \omega_I^2 + \omega_{II}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Weil ferner das Absolutglied ist

$$\omega'^2_k\, \omega''^2_k = \omega_I^2\, \omega_2^2 = \omega_{II}^2\, \omega_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

so kommt

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}.$$

Dividiert man Gl. (17) durch Gl. (18), so folgt noch

$$\frac{1}{\omega'^2_k} + \frac{1}{\omega''^2_k} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

so daß der geometrische Zusammenhang dieser sechs kritischen Frequenzen in einfacher Weise durch beistehende Abb. 4 gekennzeichnet ist, in welcher, da CAB ein Halbkreis, ferner $\frac{1}{DE^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}$ und $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ ist, die Gl. (17) und (19) erfüllt sind.

4. Die Störungskräfte lassen sich auf eine Einzelkraft zurückführen. Für das Auswuchten ist es wichtig, die Bewegung des Körpers zu untersuchen, wenn die Störungskräfte nicht einer Kraft und einem Kräftepaar gleichkommen, sondern, wenn sie nur einer Einzelkraft entsprechen, die irgendwo am Körper angreift. Wie aus Abb. 2 ersichtlich, müssen in diesem Falle die Koordinaten von μ_1 und μ_2 die Bedingung erfüllen $\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}$, weshalb nach Gl. (6) und (7)

$$\frac{\xi_s}{\eta_s} = \frac{E}{D}.$$

Mit Rücksicht auf Gl. (10) ergibt sich dann:

$$B_1 = -A_1\,\frac{D}{E}, \qquad B_2 = -A_2\,\frac{D}{E}, \qquad B_I = A_I\,\frac{E}{D}, \qquad B_{II} = A_{II}\,\frac{E}{D}$$

[1]) Die Querschnittsform dieser Fläche ist für das primitive Auswuchten eines Rotors insofern von Bedeutung, als von dieser die Länge der etwa durch einen Rotstift auf der Welle erzeugten Markierung abhängt, aus welcher der auswuchtende Monteur die Lage und Größe der Störungskräfte zu bestimmen sucht.

und damit nach Gl. (14)

$$\beta_{II} = -\alpha_{II}\frac{D}{E}, \qquad \beta_1 = -\alpha_1\frac{D}{E}, \qquad \beta_I = \alpha_I\frac{E}{D}, \qquad \beta_2 = \alpha_2\frac{E}{D}.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (15) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= (\alpha_1 + \alpha_{II} z)\left(\cos\omega t - \frac{D}{E}\sin\omega t\right) = (\alpha_1 + \alpha_{II} z)\frac{\sqrt{D^2+E^2}}{E}\cos(\omega t + \varepsilon) \\ y &= (\alpha_2 - \alpha_I z)\left(\cos\omega t + \frac{E}{D}\sin\omega t\right) = (\alpha_2 - \alpha_I z)\frac{\sqrt{D^2+E^2}}{D}\sin(\omega t + \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Hiernach hat man das für das Auswuchten wichtige Ergebnis, daß, falls die Störung eine Einzelkraft (oder auch ein einzelnes Kräftepaar) ist, die Bewegung der Körperachse sich so vollzieht, daß alle ihre Punkte Ellipsen mit zueinander parallelen Ellipsenachsen beschreiben. Nach Gl. (20) arten die Ellipsen für $z' = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{II}}$ und $z'' = \frac{\alpha_2}{\alpha_I}$ aus und diese Achspunkte schwingen geradlinig in Richtung der y- bzw. x-Achse, doch so, daß sie zueinander um den Winkel $\pi/2$ in Phase sind. Man kann sich also jetzt leicht eine Vorstellung von einer solchen wiederum astigmatischen Bewegung der Achse machen. Zu Abb. 5 ist das vorige Beispiel mit einer Einzelkraft angenommen und aus dem Vergleich mit Abb. 3 ergibt sich wohl der Unterschied dieser beiden Achsenflächen. Offenbar erinnert Abb. 5 an die in der Geometrie bekannte »Normalenfläche«, sofern ihr eine Ellipse als Indikatrix zugrunde liegt[1]). Es läßt sich ohne Schwierigkeit erkennen, daß die Drehachse aber nur dann eine solche Fläche beschreibt, wenn bei einer Einzelkraft oder einem Einzelmoment $c_1 = c_I$ und $c_2 = c_{II}$, d. h. wenn die Wellenzapfen des Körpers je gleichmäßig elastisch gelagert sind. Hierzu sei bemerkt, daß unter gewisser Bedingung diese Normalenfläche in einen Kreiskegel übergeht, so daß bei konstanter Drehzahl der Körper um dessen ruhende Spitze rotiert wie ein um seinen festen Unterstützungspunkt sich drehender Kreisel. Am einfachsten kennzeichnet sich dieser Sonderfall, wenn man in Gl. (8) anstatt der Koordinaten der Lagermitten die Koordinaten des Schwerpunktes x_0, y_0 und die Winkel um die x- und die y-Achse, nämlich φ_0 und ψ_0, einführt[2]). Ist nur eine Störungsmasse μ vorhanden, deren Koordinaten in bezug auf das mitbewegte System ϱ, o, λ sind, so schreiben sich die Bewegungsgleichungen unter den gemachten Vereinfachungen:

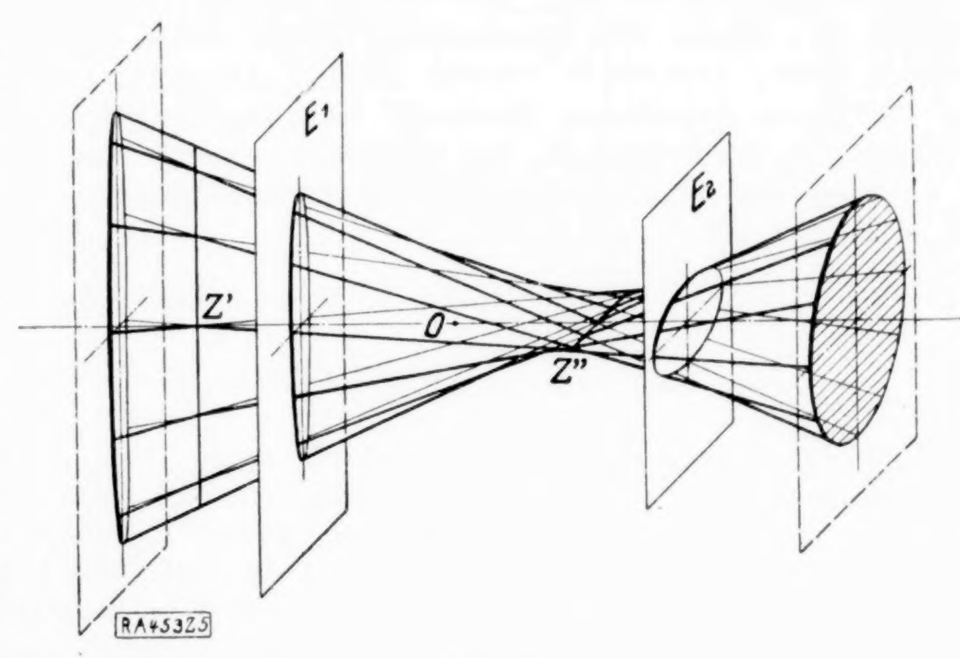


Abb. 5.

$$m\ddot{x}_0 + (c_1 + c_2)x_0 + (c_2 l_2 - c_1 l_1)\psi_0 = \mu\varrho\omega^2\cos\omega t$$
$$m\ddot{y}_0 + (c_I + c_{II})y_0 - (c_{II} l_2 - c_I l_1)\varphi_0 = \mu\varrho\omega^2\sin\omega t$$
$$T_0\ddot{\varphi}_0 + T_a\omega\dot{\psi}_0 - (c_{II} l_2 - c_I l_1)y_0 + (c_{II} l_2^2 + c_I l_1^2)\varphi_0 = -\mu\varrho\lambda\omega^2\sin\omega t$$
$$T_0\ddot{\psi}_0 - T_a\omega\dot{\varphi}_0 + (c_2 l_2 - c_1 l_1)x_0 + (c_2 l_2^2 + c_1 l_1^2)\psi_0 = \mu\varrho\lambda\omega^2\cos\omega t.$$

Sind die Lagerverhältnisse derart, daß $c_1 l_1 = c_2 l_2$ und $c_I l_1 = c_{II} l_2$, so werden diese Gleichungen sozusagen »entkoppelt«: die Bewegung des Schwerpunktes und die Drehung der Achse erfolgen unabhängig von einander. Da — wie vorausgesetzt — gleichmäßig-elastische Lagerung besteht, so beschreibt offenbar der Schwerpunkt einen Kreis, und bei

[1]) Vergl. G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 3. Aufl., Bd. II, Abb. 76.

[2]) Um eine Verwechslung mit den Eulerschen Winkeln zu vermeiden, wurden im Abschnitt 2 diese Winkel α und β genannt.

diesem als Indikatrix ist die Normalenfläche ein Kreiskegel. Die Kegelspitze ist hierbei allerdings nicht ortsfest für alle Drehzahlen, sondern ihr Abstand l_s vom Schwerpunkt des Körpers ist abhängig von diesen. Wie man sich auf Grund der vorstehenden Differentialgleichungen überzeugt, ist

$$l_s = \frac{(T_0 - T_a)\,\omega^2 - c_1\,l_1{}^2 - c_2\,l_2{}^2}{\lambda\,(c_1 + c_2 - m\,\omega^2)} .$$

Bei einem Kräftepaar ($\lambda = \infty$) liegt also der Drehpunkt im Schwerpunkt, dagegen bei einer Einzelkraft durch den Schwerpunkt ($\lambda = 0$) liegt der Drehpunkt im Unendlichen, der sich drehende Körper schwingt im Kreise um mit parallel bleibender Drehachse. Es ist hier wohl zu beachten, daß diese Erscheinungen nur bei den vorstehenden besonderen Lagerverhältnissen auftreten, dagegen nicht bei beliebiger Lagerung des Rotors, wo eine z. B. durch dessen Schwerpunkt gehende Störungskraft eine Achsenfläche nach Art der Abb. 5 zur Folge hat.

Für die Theorie des Auswuchtens ist es von Wichtigkeit, auf zwei Folgerungen hinzuweisen, die sich ohne weiteres aus dem Vorstehenden ergeben. Die erste betrifft das Superpositionsgesetz, wonach eine Achsenfläche, hervorgerufen durch zwei in der λ_1- und in der λ_2-Ebene gelegene beliebige Störungsvektoren $\mu_1\,\overline{\varrho_1} = \mu_1'\,\overline{\varrho_1'} + \mu_1''\,\overline{\varrho_1''}$ und $\mu_2\,\overline{\varrho_2} = \mu_2'\,\overline{\varrho_2'} + \mu_2''\,\overline{\varrho_2''}$ mittels Uebereinanderlagerung der durch die einzelnen Störungsvektoren $\mu_1'\,\overline{\varrho_1'}$, $\mu_2'\,\overline{\varrho_2'}$ und $\mu_1''\,\overline{\varrho_1''}$, $\mu_2''\,\overline{\varrho_2''}$ erzeugten Achsenflächen entsteht. Aus den Gl. (15) ist dies unter Berücksichtigung der Gl. (6) und (7) ohne weiteres zu erkennen. Ueberdies folgt dieses Gesetz aus der Linearität der aufgestellten Differentialgleichungen. — Die andere Folgerung ist die, daß durch passende Zusatzmassen oder durch Entfernen von Massen des Rotors die Schwingung irgend eines Punktes z seiner Achse in bestimmt gewollter Weise beeinflußt werden kann. Als wichtiges Beispiel sei die Aufgabe gestellt, die bei einer gegebenen Drehzahl auftretende elliptische Schwingung einer Lagermitte, etwa von L_1 durch Zugabe von Massen in irgend einer Ebene, z. B. der λ_1-Ebene (Abb. 2), in eine vertikale lineare Schwingung überzuführen. Schreibt man wegen Gl. (6) und (7) die erste der Gl. (9)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\omega^2}{a_0}\,[(a_1 + \lambda_1\,b_1)\,\mu_1\,\xi_1 + (a_1 - \lambda_2\,b_1)\,\mu_2\,\xi_2)\,\cos\,\omega\,t \\ &\quad + \frac{\omega^2}{a_0}\,[(-a_1 - \lambda_1\,b_1)\,\mu_1\,\eta_1 + (-a_1 + \lambda_2\,b_1)\,\mu_2\,\eta_2]\,\sin\,\omega\,t \end{aligned}\right\} \quad . \quad (21),$$

so kann x_1 geometrisch sehr einfach nach Abb. 6 dargestellt werden, wo A_1 den Koeffizienten von $\cos\,\omega t$ und B_1 den von $\sin\,\omega t$ bedeuten. Bringt man B_1 zum Verschwinden durch Anbringen von Ausgleichmassen auf der η_1-Achse (wofür natürlich jeder Radius gewählt werden kann), kenntlich an dem verbleibenden Amplitudenminimum OS_1, so ist die Aufgabe gelöst, wenn durch Austarieren auf einem Radius senkrecht zur gewählten η_1-Achse dieser Ausschlag OS_1 beseitigt wird. Mit Hilfe irgend eines Instruments, das die Größe der Amplitude festzustellen gestattet, ist man also leicht imstande, der Lagermitte, und übrigens gemäß dem gleichen Schlusse bei Gl. (15), einem jeden Punkt der Achse eine Schwingungskomponente zu nehmen und zwar, was besonders wichtig ist, bei einem und demselben Drehsinn des Rotors. — Nach Gl. (21) verschwindet x_1, die Bewegung geht in eine vertikale lineare Schwingung über, wenn

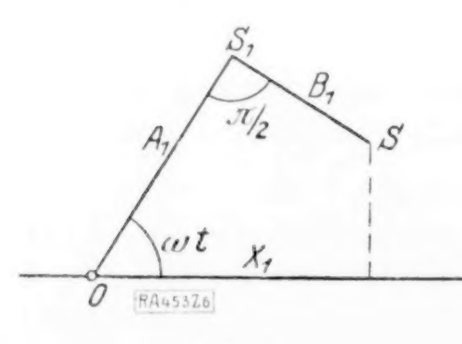


Abb. 6.

$$\mu_2\,\xi_2 = \frac{\lambda_1\,b_1 + a_1}{\lambda_2\,b_1 - a_1}\,\mu_1\,\xi_1, \qquad \mu_2\,\eta_2 = \frac{\lambda_1\,b_1 + a_1}{\lambda_2\,b_1 - a_1}\,\mu_1\,\eta_1,$$

d. h. wenn die Störungsvektoren $\mu_1\,\overline{\varrho_1}$ und $\mu_2\,\overline{\varrho_2}$ ganz in Uebereinstimmung mit dem obigen in eine Ebene fallen, wobei offenbar

$$\frac{\mu_2\,\varrho_2}{\mu_1\,\varrho_1} = \frac{\lambda_1\,b_1 + a_1}{\lambda_2\,b_1 - a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

das Verhältnis ihrer Beträge ist, auf das es allein ankommt. — Damit also ein Rotor stets um die Lagermitte 1, vertikal gesehen, schwingt, müssen die Störungskräfte eine einzige Resultierende haben, deren Größe beliebig ist, deren Abstand λ vom Schwerpunkt des Körpers jedoch von der Drehgeschwindigkeit ω abhängt. Um ein Bild dieses Zu-

sammenhanges zu erhalten, sei die vereinfachende Annahme gemacht, daß die Kreiselwirkung des Rotors zu vernachlässigen sei, oder was auf dasselbe hinauskommt, daß der Rotor wie auf einer Auswuchtmaschine nur horizontale Bewegungen machen kann. Die Entfernung λ der kraftführenden Ebene vom Schwerpunkt ergibt sich aus der Momentengleichung

$$\mu_1 \varrho_1 (\lambda + \lambda_1) + \mu_2 \varrho_2 (\lambda - \lambda_2) = 0$$

zu

$$\lambda = \frac{\frac{\mu_2 \varrho_2}{\mu_1 \varrho_1} \lambda_2 - \lambda_1}{\frac{\mu_2 \varrho_2}{\mu_1 \varrho_1} + 1} .$$

Setzt man hier für $\frac{\mu_2 \varrho_2}{\mu_1 \varrho_1}$ den Wert nach Gl. (22), so wird $\lambda = \frac{a_1}{b_1}$ und für $T_a = 0$ oder auch für $c_I = c_{II} = \infty$ findet man gemäß Gl. (11) und (13)

$$\lambda = \frac{\omega^2 T_0 - c_2 l l_2}{\omega^2 m l_1 - c_2 l} \qquad (23).$$

Diese hyperbolische Abhängigkeit von ω^2 zeigt Abb. 7. Die wirkende Einzelzentrifugalkraft geht bei geringer Drehzahl durch Lager 2 und ihre Ebene verschiebt sich mit wachsendem ω nach rechts und geht ins Unendliche bei $\omega^2 = \frac{c_2 l}{m l_1}$. Wird die Drehzahl noch größer, so rückt die Ebene von links über das Lager 1 durch den Schwerpunkt O und kommt bei $\omega = \infty$ nach M. Zwischen den Punkten M und 2 kann im vorliegenden Fall keine Störungskraft liegen. Merkwürdig ist, daß bei einer bestimmten Drehgeschwindigkeit ω_1 diese Kraft durch den Drehpunkt 1 selbst geht. Da ihr Hebelarm null ist, so kann nur bei Resonanz die Schwingung erfolgen. Setzt man für $\lambda = -l_1$, so gibt Gl. (23) in der Tat die oben schon erwähnte Frequenz $\omega_1 = \sqrt{\frac{c_2 l^2}{T_1}}$. Eine besondere Rolle spielt der Punkt M. Wird ω unendlich, so wird $\lambda = \lambda_m = \frac{T_0}{m l_1}$, d. h. M ist der Schwingungsmittelpunkt des um den Punkt 1 schwingenden Rotors. Da dieser Drehpunkt nicht von außen festgehalten, sondern ein elastisch-freier Punkt ist, so hat M darin seine Bedeutung, daß die auf den Rotor wirkenden äußeren Kräfte eine Resultierende haben müssen, die durch M hindurchgeht. Hiernach kann man Gl. (23) auch direkt ableiten und damit die bisherige Darstellung nachprüfen: Bedeutet $\overline{Z}$ die im Abstand λ wirkende Zentrifugalkraft, A_2 die Amplitude der harmonischen Bewegung des Lagermittelpunktes 2, so bestehen, wie ohne weiteres ersichtlich, die beiden Gleichgewichtsbedingungen

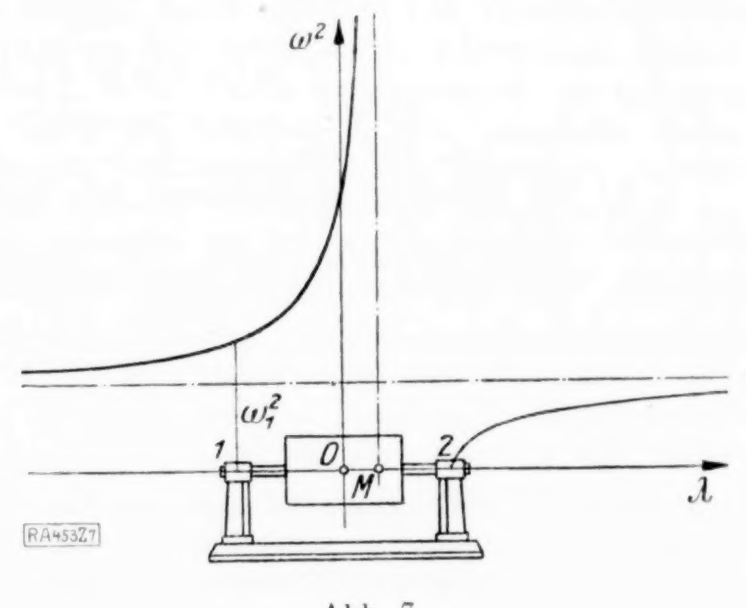


Abb. 7.

$$Z - A_2 c_2 + m \omega^2 \frac{A_2}{l} l_1 = 0, \qquad Z\lambda - A_2 c_2 l_2 + m \omega^2 \frac{A_2}{l} l_1 \lambda_m = 0.$$

Wird Z eliminiert, so kommt in der Tat für λ der in Gl. (23) angegebene Wert [1]).

Ist stärkere Reibung vorhanden, so ist natürlich nicht mehr eine einzige Kraft $\overline{Z}$ im Abstand λ bei dem nach Gl. (23) festgelegten ω imstande, den Rotor um den Punkt 1 horizontal pendeln zu lassen, sondern es ist hierzu noch eine zweite Kraft nötig, die leicht mittels der vektoriellen Darstellung zu finden ist. In Abb. 8 gibt die horizontale Projektion des Vektors $\overline{A}_2$ bei seiner Drehung mit der Drehgeschwindigkeit ω den horizontalen Ausschlag von 2 an. Der Vektor der Lagerreaktion ist dann $-\overline{A}_2 c_2$ und die

[1]) Praktisch wird die λ, ω^2-Kurve von der Hyperbel etwas abweichen, weil die wirksame Oelschicht zwischen Zapfen und Lager den c-Wert von der Drehzahl natürlich abhängig macht. Bei biegsamen Wellen ist λ aus den Kräften Q in den »verlegten Unbalanzebenen« zu bestimmen. Vergl. Abschnitt 6.

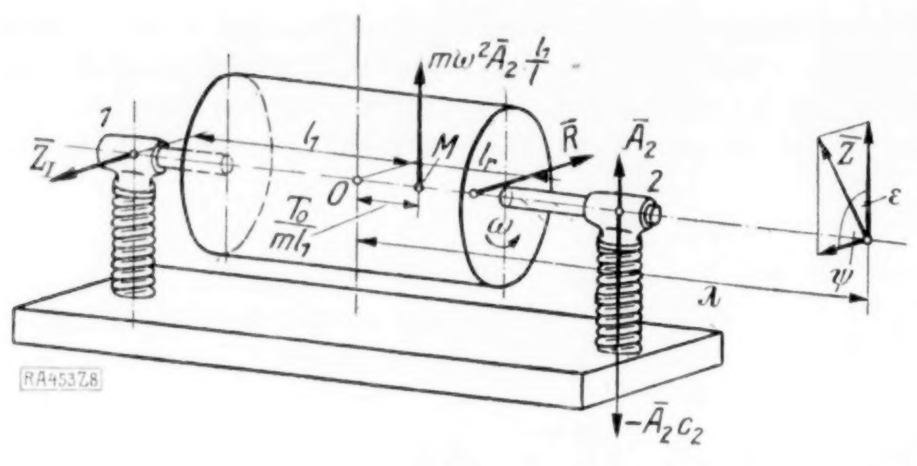


Abb. 8.

Trägheitskräfte sind durch $m\omega^2 \bar{A}_2 \frac{l_1}{l}$ im Schwingungsmittelpunkt M gekennzeichnet. Greift die Resultierende der Reibungskräfte im Abstand l_r vom Schwerpunkt O an, so ist dort der Reibungsvektor $\bar{R}$ bei der ebenen Schwingung dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\bar{A}}_2$ entgegengesetzt anzunehmen. Dieser Vektor ist es nun, welcher die Lagerreaktion $\bar{Z}_I$ hervorruft und zugleich dem Zentrifugalkraft-Vektor $\bar{Z}$ einen Voreilwinkel ε gegenüber der Schwingung $\bar{A}_2$ erteilt. Aus dem Umstand, daß sämtliche Kräfte im Gleichgewicht stehen, ergeben sich die vier Bedingungen

$$Z \cos \varepsilon - A_2 c_2 + m\,\omega^2 A_2 \frac{l_1}{l} = 0, \qquad Z \sin \varepsilon - R + Z_I = 0,$$

$$Z \cos \varepsilon \left(\lambda - \frac{T_0}{m\, l_1}\right) - A_2 c_2 \left(l_2 - \frac{T_0}{m\, l_1}\right) = 0, \qquad Z \sin \varepsilon\,(\lambda - l_r) - Z_I\,(l_1 + l_r) = 0,$$

von denen die beiden links stehenden Gleichungen wieder den Abstand λ in Gl. (23) liefern. Aus diesen Beziehungen, aber auch unmittelbar aus Abb. 8 kann man entnehmen, daß

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A_2\left(c_2 - m\,\omega^2 \frac{l_1}{l}\right)(\lambda + l_1)}{R\,(l_1 + l_r)}, \qquad \frac{Z_I}{Z} = \frac{\lambda - l_r}{l_1 + l_r} \cos \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Ist die Reibung proportional der Geschwindigkeit, so daß Vektor $\bar{R} = -\varrho\,\omega\,\bar{A}_2$ und verändert sich l_r nicht, so ist offenbar der Winkel ψ, den die Kräfte $\bar{Z}_I$ und $\bar{Z}$ einschließen und das Verhältnis $Z_I\!:\!Z$ ihrer Beträge konstant. Führt man nun $\bar{Z}_I$ und $\bar{Z}$ nach den Regeln der Statik auf zwei gleichwertige Kräfte $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$ in den Ebenen E_1 und E_2 zurück, so gilt dasselbe auch für diese und man kann umgekehrt sagen, daß, welche Größe und auch welche Lage in E_1 und E_2 diese radialen Kräfte immer haben mögen, der Körper stets um den einmal angenommenen Punkt 1 als Drehpunkt schwingt, vorausgesetzt nur, daß der Schränkungswinkel zwischen $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$ und daß das Verhältnis ihrer Beträge den aus Gl. (24) herrührenden, jedoch noch umzurechnenden Werten entsprechen. Wegen der Bedeutung für das Auswuchten seien die beiden auf $\omega = 1$ bezogenen Kräfte $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$ eine »Tarierkoppel« genannt, wobei im Falle der Reibungslosigkeit diese aus parallelen, sonst aber aus sich kreuzenden Kräften besteht. Man erkennt, daß die Schwingung eines Rotors um einen Punkt durch Hinzufügen oder Wegnehmen einer Tarierkoppel erhalten bleibt, daß aber sehr wohl die Amplitude der Schwingung hierdurch beeinflußbar ist. — Daß bei einem einfach schwingenden Körper mit praktisch genügender Genauigkeit die Reibung proportional der Geschwindigkeit gesetzt werden darf, sofern die Ausschläge klein bleiben, ist durch die Erfahrung bestätigt. Ob aber bei einem z. B. in Luft oder Dampf rotierenden und gleichzeitig schwingenden Körper die notwendigen Bedingungen der Tarierkoppel erfüllt sind, ist nicht ohne weiteres sicher, namentlich auch wegen den nicht ganz einfachen Vorgängen, die bei der Bewegung des Zapfens in seinem Lager eintreten. Da nur die Erfahrung hierüber Aufschluß geben kann, wurden an kleineren und größeren, in Gleitlagern geführten Rotoren eingehende Versuche in dieser Richtung angestellt. Diese haben in völlig befriedigender Weise die Gleichheit des Winkels und die Proportionalität der Kräfte der Tarierkoppel ergeben, weshalb anzunehmen ist, daß auch hier die Reibungskraft in unveränderlichem Abstand vom Drehpunkt angreift und daß sie proportional der Geschwindigkeit ist.

Hier anschließend sei noch bemerkt, daß es für die Beurteilung der Schwingungsvorgänge von Interesse sein kann, die Größe der Lagerrückstellkräfte unmittelbar durch den Versuch zu bestimmen. Gemäß Gl. (23), die ja auch bei Reibung gilt, erhält man z. B. für das Lager 2

$$c_2 = \frac{\omega^2\,(m\,l_1\,\lambda - T_0)}{l\,(\lambda - l_2)}$$

wo λ aus den bekannten Tarierkräften $\overline{Z}_1$ und $\overline{Z}_2$ zu ermitteln ist, indem man auf die Kräfte $\overline{Z}_I$, $\overline{Z}$ zurückgeht, dadurch gekennzeichnet, daß der Vektor $\overline{A}_2$ senkrecht auf $\overline{Z}_I$ steht.

5. Verfahren zum Ausgleich der Massen rotierender Körper. Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen ergeben sich neue Verfahren[1]) zum restlosen Ausgleich der Massen eines Rotors. Lagert man diesen Körper so, daß er etwa nur horizontale Schwingungen ausführen kann, und setzt z. B. das Lager 1 still, so gilt Gl. (23)

$$\lambda = \frac{\omega^2 T_0 - c_2 l l_2}{\omega^2 m l_1 - c_2 l} .$$

Sie besagt, daß wenn dieses Stillsetzen bei der Drehgeschwindigkeit ω stattgefunden hat, der Rotor noch eine Störungskraft $\overline{Z}$ im Abstand λ vom Schwerpunkt enthält und eine von der Reibung herrührende verhältnismäßig kleine Kraft $\overline{Z}_I$, die durch das Lager 1 geht. Sind die spezifischen Rückstellkräfte c infolge einer starken Lagerung sehr groß, so fällt bei nicht zu hoher Drehzahl die Kraft $\overline{Z}$ in das Lager 2, wie aus Gl. (23) hervorgeht und sie kann jetzt nach den Regeln der Statik von den Tarierebenen E_1 und E_2 aus in einfacher Weise vernichtet werden. Kann von der kleinen Reibungskraft $\overline{Z}_I$ abgesehen werden, so ist der Körper bereits ausgewuchtet; im anderen Fall ist das Verfahren zum Ausgleich von $\overline{Z}_I$ weiter zu führen. Einen andern Weg zum Auswuchten findet man, wenn man die Rückstellkraft c_2 sehr klein macht, also das Lager 2 auf Kugeln, weichen Gummi oder dergl. setzt. Wird jetzt das Lager 1 schwingungsfrei gemacht, so enthält der Rotor, abgesehen von der kleinen Kraft $\overline{Z}_I$ eine durch den Schwingungsmittelpunkt gehende Unbalanz, die wieder nach den Regeln der Statik von den Tarierebenen E_1 und E_2 aus getilgt werden kann. Handelt es sich um das reihenweise Auswuchten gleichgebauter Rotoren, so empfiehlt es sich hierfür die λ, ω^2 = Kurve aufzunehmen, so daß man bei Beruhigung des Lagers 1 sofort die die Restkraft führende Ebene angeben kann. Zweckmäßig benutzt man dann diejenige Drehzahl, bei welcher diese Restkraft in eine bereits vorhandene Tarierebene fällt, also, wenn λ deren Abstand vom Schwerpunkt ist, gemäß Gl. (23) $n = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{c_2 l (l_2 - \lambda)}{T_0 - m l_1 \lambda}}$. Wird jetzt das Lager 2 von dieser Ebene aus zur Ruhe gebracht, so ist, wieder von dem Einfluß der Reibung abgesehen, der Massenausgleich erledigt. Man kann hierbei statt mit einer Einzelkraft auch mit Kräftepaaren arbeiten, die bei $n = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{c_2 l}{m l_1}}$ auftreten.

Handelt es sich ferner um das praktisch sehr wichtige Problem, eine raschlaufende Maschine unter ihren Betriebsbedingungen in den eigenen Lagern auszuwuchten, so z. B. den 10000 kg schweren Rotor eines mittelgroßen 3000-tourigen Generators, so sind offenbar die vorstehenden Verfahren nicht gut anwendbar: Die Lagerrückstellkräfte sind gegebene Größen, über die nicht verfügt werden kann und eine andere als die Betriebsdrehzahl darf nicht gewählt werden, da der Massenausgleich unbedingt bei dieser vorzunehmen ist. In der einstweiligen Annahme, daß der Rotor ein starrer Körper und das Fundament unnachgiebig ist, kann man mit Vernachlässigung der Reibung das Auswuchten unter Heranziehung der früheren Ergebnisse auf folgende Weise erreichen: Man bringe zunächst eines der Lager, etwa Lager 1, von der Tarierebene E_1 aus horizontal zur Ruhe. Hierdurch ist erreicht, daß die in den Ebenen E_1 und E_2 liegenden restlichen Unbalanzvektoren $\mu_1 \varrho_1$ und $\mu_2 \varrho_2$ nach der früheren Gl. (22) das Verhältnis $\frac{\mu_2 \varrho_2}{\mu_1 \varrho_1} = \frac{\lambda_1 b_1 + a_1}{\lambda_2 b_1 - a_1}$ haben, wobei der Schränkungswinkel, da ja keine nennenswerte Reibung vorliegt, null ist. Nun bilden je zwei beliebige Tariervektoren in denselben Ebenen, sofern sie dasselbe Verhältnis und auch den Schränkungswinkel null haben, eine Tarierkoppel und mit Hilfe derartiger Tarierkoppeln hat man jetzt nur noch entweder die Vertikalkomponente vom Lager 1 oder irgend eine beliebige Schwingungskomponente vom Lager 2 auszutarieren. Um das fragliche Vektorenverhältnis zu bestimmen, könnte man zwar Gl. (22) verwenden; da sie jedoch die völlige Beherrschung aller Systemkonstanten voraussetzt, ist ihre Benutzung praktisch kaum möglich. Müheloser und schneller führt jedenfalls die experimentelle Ermittlung zum Ziel, die darin besteht, daß man das vorher horizontal zur Ruhe gebrachte Lager 1 durch einen beliebigen Störungsvektor $\mu_I \varrho_I$ etwa in E_1 nochmals in

[1]) Unter Patentschutz.

Schwingungen versetzt, und diese hierauf durch einen Tariervektor $\mu_{II}\,\varrho_{II}$ wieder austilgt, wodurch in $\mu_I\,\varrho_I$ und $\mu_{II}\,\varrho_{II}$ die gesuchte Tarierkoppel gefunden ist.

6. Der Massenausgleich bei elastisch-biegsamer Welle. Bisher war vorausgesetzt, daß der Rotor, insbesondere seine Welle völlig starr sind. Bei ausgeführten Konstruktionen ist eine solche Annahme nur bei niedrigen Drehzahlen, wenn also die Zentrifugalkräfte gering sind, begründet. Sie muß hier aufgegeben werden, weil alle Turbomaschinen natürlich hochtourig, meist »überkritisch« laufen, d. h. bei einer Drehzahl, die über der ersten Biegungsschwingungszahl liegt. Nun ist klar, daß bei einer biegsamen Welle unter sonst gleichen Verhältnissen der Unbalanz ein ganz anderes Kräftebild entsteht, als bei einer starren Welle, denn es werden ja durch die Deformation vorher nicht vorhandene Massenverlagerungen erzeugt, die zusätzliche störende Zentrifugalkräfte wachrufen. Die Frage nach dem Auswuchten von Rotoren mit derartigen Wellen läßt sich nun vorweg dahin beantworten, daß dieses für eine irgendwie gewählte Drehzahl im allgemeinen möglich ist, daß aber ein absolut schwingungsfreier Lauf für alle anderen Drehzahlen nicht erreicht werden kann. Für die Praxis genügt diese Tatsache in den meisten Fällen, da die Betriebsdrehzahlen insbesondere der Großmaschinen fast immer konstant sind und die kurze Zeit des störenden An- und Auslaufs nicht in Betracht kommt. Allerdings zeigt die Rechnung — und die Auswuchterfahrung bestätigt es —, daß leider Fälle eintreten können, bei denen die Beruhigung eines Rotors, etwa von zwei vorhandenen Tarierebenen aus einfach nicht möglich ist und daß solche Maschinen, namentlich wenn sie auf einem empfindlichen Fundament sitzen, dauernd zu lästiger Unruhe neigen.

Um einen ersten Einblick in die Verhältnisse zu gewinnen, ist es zweckmäßig, sich eine in zwei festen Lagern gelagerte biegsame Welle zu denken — in beweglichen, nicht allzu stark schwingenden Lagern ändern sich die Erscheinungen nicht wesentlich — die mehrere, z. B. vier gering exzentrisch verlagerte Laufräder von den Massen m, die in Abständen l von dem einen Lager angeordnet sind, trägt. Sind e die Exzentrizitäten, die der Einfachheit wegen alle in einer axialen Ebene liegen mögen, und f die Durchbiegungen der Welle am Sitz der Laufräder, so ergeben sich mit Hilfe der Einflußzahlen der Welle für eine bestimmte Drehgeschwindigkeit ω die folgenden Gleichungen:

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, m_k\, \omega^2 (e_k + f_k) \qquad i = 1, 2 \ldots n\,,$$

aus welchen man, für $m_k\,\omega^2\,e_k = Z_k$ gesetzt, die Durchbiegungen an den im Beispiel angenommenen vier Laufrädern erhält:

$$f_1 = \frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} -(\alpha_{11} Z_1 + \alpha_{12} Z_2 + \alpha_{13} Z_3 + \alpha_{14} Z_4) & \alpha_{12} m_2 \omega^2 & \alpha_{13} m_3 \omega^2 & \alpha_{14} m_4 \omega^2 \\ -(\alpha_{21} Z_1 + \alpha_{22} Z_2 + \alpha_{23} Z_3 + \alpha_{24} Z_4) & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 & \alpha_{23} m_3 \omega^2 & \alpha_{24} m_4 \omega^2 \\ -(\alpha_{31} Z_1 + \alpha_{32} Z_2 + \alpha_{33} Z_3 + \alpha_{34} Z_4) & \alpha_{32} m_2 \omega^2 & \alpha_{33} m_3 \omega^2 - 1 & \alpha_{34} m_4 \omega^2 \\ -(\alpha_{41} Z_1 + \alpha_{42} Z_2 + \alpha_{43} Z_3 + \alpha_{44} Z_4) & \alpha_{42} m_2 \omega^2 & \alpha_{43} m_3 \omega^2 & \alpha_{44} m_4 \omega^2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$f_2 = \frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & -(\alpha_{11} Z_1 + \alpha_{12} Z_2 + \alpha_{13} Z_3 + \alpha_{14} Z_4) & \alpha_{13} m_3 \omega^2 & \alpha_{14} m_4 \omega^2 \\ \alpha_{21} m_1 \omega^2 & -(\alpha_{21} Z_1 + \alpha_{22} Z_2 + \alpha_{23} Z_3 + \alpha_{24} Z_4) & \alpha_{23} m_3 \omega^2 & \alpha_{24} m_4 \omega^2 \\ \alpha_{31} m_1 \omega^2 & -(\alpha_{31} Z_1 + \alpha_{32} Z_2 + \alpha_{33} Z_3 + \alpha_{34} Z_4) & \alpha_{33} m_3 \omega^2 - 1 & \alpha_{34} m_4 \omega^2 \\ \alpha_{41} m_1 \omega^2 & -(\alpha_{41} Z_1 + \alpha_{42} Z_2 + \alpha_{43} Z_3 + \alpha_{44} Z_4) & \alpha_{43} m_3 \omega^2 & \alpha_{44} m_4 \omega^2 - 1 \end{vmatrix}$$

usf. Hierbei ist

$$D_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 & \alpha_{13} m_3 \omega^2 & \alpha_{14} m_4 \omega^2 \\ \alpha_{21} m_1 \omega^2 & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 & \alpha_{23} m_3 \omega^2 & \alpha_{24} m_4 \omega^2 \\ \alpha_{31} m_1 \omega^2 & \alpha_{32} m_2 \omega^2 & \alpha_{33} m_3 \omega^2 - 1 & \alpha_{34} m_4 \omega^2 \\ \alpha_{41} m_1 \omega^2 & \alpha_{42} m_2 \omega^2 & \alpha_{43} m_3 \omega^2 & \alpha_{44} m_4 \omega^2 - 1 \end{vmatrix},$$

welche Determinante auf null gebracht, die kritischen Drehzahlen n_k bestimmt[1]). Es lassen sich also die Durchbiegungen durch die folgenden linearen Gleichungen darstellen:

$$f_1 = \beta_{11}' Z_1 + \beta_{12} Z_2 + \beta_{13} Z_3 + \beta_{14} Z_4\,, \qquad f_2 = \beta_{21} Z_1 + \beta_{22}' Z_2 + \beta_{23} Z_3 + \beta_{24} Z_4$$
$$f_3 = \beta_{31} Z_1 + \beta_{32} Z_2 + \beta_{33}' Z_3 + \beta_{34} Z_4\,, \qquad f_4 = \beta_{41} Z_1 + \beta_{42} Z_2 + \beta_{43} Z_3 + \beta_{44}' Z_4,$$

[1]) Vergl. A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen 1924, S. 370.

wo die β-Werte als Koeffizienten von Z aus den vorhergehenden Gleichungen für f folgen. Wie man zeigen kann, ist $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, so daß der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen bemerkenswerterweise auch im Feld der Zentrifugalkräfte gilt derart, daß eine mit konstanter Drehzahl rotierende Welle, welche eine Anzahl Massen trägt, an der Stelle i durch die Einheit der Zentrifugalkraft an der Stelle k ebenso durchgebogen wird, wie an der Stelle k durch die Einheit der Zentrifugalkraft an der Stelle i[1]). Die durch die gegebene Verlagerung e_i und durch die Wellendurchbiegung f_i hervorgerufene Kraft ist $P_i = m_i\,\omega^2\,(e_i + f_i)$, so daß mit $\beta_{ii} = \beta_{ii}' + \dfrac{1}{m_i\,\omega^2}$ die Störungskräfte im vorliegenden Beispiel sind:

$$P_1 = m_1\,\omega^2\,(\beta_{11}\,Z_1 + \beta_{12}\,Z_2 + \beta_{13}\,Z_3 + \beta_{14}\,Z_4)$$
$$P_2 = m_2\,\omega^2\,(\beta_{21}\,Z_1 + \beta_{22}\,Z_2 + \beta_{23}\,Z_3 + \beta_{24}\,Z_4)$$
$$P_3 = m_3\,\omega^2\,(\beta_{31}\,Z_1 + \beta_{32}\,Z_2 + \beta_{33}\,Z_3 + \beta_{34}\,Z_4)$$
$$P_4 = m_4\,\omega^2\,(\beta_{41}\,Z_1 + \beta_{42}\,Z_2 + \beta_{43}\,Z_3 + \beta_{44}\,Z_4).$$

Hat nur die Scheibe 1 die Exzentrizität e_1, so treten hiernach dennoch vier Kräfte auf, nämlich $P_{11} = m_1\,\omega^2\,\beta_{11}\,Z_1$, $P_{21} = m_2\,\omega^2\,\beta_{21}\,Z_1$ usw., und man kann offenbar nach derjenigen einzigen Störungskraft Q_1 in einer Ebene E_1 im Abstand L_1 von dem einen Lager fragen, welche bei dem gleichen Rotor — jedoch mit starrer Welle — dieselbe Wirkung wie P_{11}, P_{21}, P_{31}, P_{41} zusammen hervorruft. Der Statik gemäß muß sein

$$Q_1 = \omega^2\,(m_1\,\beta_{11} + m_2\,\beta_{21} + m_3\,\beta_{31} + m_4\,\beta_{41})\,Z_1$$
$$Q_1\,L_1 = \omega^2\,(m_1\,l_1\,\beta_{11} + m_2\,l_2\,\beta_{21} + m_3\,l_3\,\beta_{31} + m_4\,l_4\,\beta_{41})\,Z_1\,,$$

woraus Q_1 und L_1 leicht zu berechnen sind. Hat nur die Scheibe 2 die Exzentrizität e_2, so findet man ebenso Q_2 im Abstand L_2 usw. Nun bemerkt man, daß, wenn sämtliche Scheiben gleichzeitig Exzentrizitäten besitzen, die Wirkung nach dem Prinzip der Uebereinanderlagerung dieselbe ist, als seien auf der starren Welle sämtliche Kräfte Q angebracht. Hiernach kann also der Rotor mit exzentrischen Scheiben auf schwanker Welle ersetzt gedacht werden durch einen sonst gleichen Rotor mit zentrischen Scheiben auf starrer Welle, welch letztere aber in den »verlegten Unbalanzebenen« E die genannten Kräfte Q trägt. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergeben sich diese zusammen mit L

zu $Q_i = \omega^2\,(\sum\limits_{1=1}^{n} \beta_{ki}\,m_k)\,Z_i$ und $L_i = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{ki}\,l_k\,m_k}{\sum\limits_{k=k}^{n} \beta_{ki}\,m_k}$ oder bei z. B. vier Scheiben

$$Q_1 = \omega^2\,(\beta_{11}\,m_1 + \beta_{21}\,m_2 + \beta_{31}\,m_3 + \beta_{41}\,m_4)\,Z_1\,, \qquad L_1 = \frac{\beta_{11}\,l_1\,m_1 + \beta_{21}\,l_2\,m_2 + \beta_{31}\,l_3\,m_3 + \beta_{41}\,l_4\,m_4}{\beta_{11}\,m_1 + \beta_{21}\,m_2 + \beta_{31}\,m_3 + \beta_{41}\,m_4}$$
$$Q_2 = \omega^2\,(\beta_{12}\,m_1 + \beta_{22}\,m_2 + \beta_{32}\,m_3 + \beta_{42}\,m_4)\,Z_2\,, \qquad L_2 = \frac{\beta_{12}\,l_1\,m_1 + \beta_{22}\,l_2\,m_2 + \beta_{32}\,l_3\,m_3 + \beta_{42}\,l_4\,m_4}{\beta_{12}\,m_1 + \beta_{22}\,m_2 + \beta_{32}\,m_3 + \beta_{42}\,m_4}$$
$$Q_3 = \omega^2\,(\beta_{13}\,m_1 + \beta_{23}\,m_2 + \beta_{33}\,m_3 + \beta_{43}\,m_4)\,Z_3\,, \qquad L_3 = \frac{\beta_{13}\,l_1\,m_1 + \beta_{23}\,l_2\,m_2 + \beta_{33}\,l_3\,m_3 + \beta_{43}\,l_4\,m_4}{\beta_{13}\,m_1 + \beta_{23}\,m_2 + \beta_{33}\,m_3 + \beta_{43}\,m_4}$$
$$Q_4 = \omega^2\,(\beta_{14}\,m_1 + \beta_{24}\,m_2 + \beta_{34}\,m_3 + \beta_{44}\,m_4)\,Z_4\,, \qquad L_4 = \frac{\beta_{14}\,l_1\,m_1 + \beta_{24}\,l_2\,m_2 + \beta_{34}\,l_3\,m_3 + \beta_{44}\,l_4\,m_4}{\beta_{14}\,m_1 + \beta_{24}\,m_2 + \beta_{34}\,m_3 + \beta_{44}\,m_4}.$$

Die Lage der Q ist also unabhängig von den Exzentrizitäten, mögen letztere wie hier der Einfachheit wegen in einer Ebene angenommen oder wie immer angeordnet sein. Der Massenausgleich eines Körpers mit schwanker Welle für eine bestimmte Drehzahl (und nur für diese!) von zwei zu ihm gehörigen Tarierebenen aus vollzieht sich demnach offenbar so, als werde der im übrigen genau gleiche Körper aber mit nicht biegsamer Welle von den entsprechenden verlegten Ebenen aus zum schwingungsfreien Lauf gebracht[2]).

---

[1]) Der Beweis dieses Satzes soll hier nicht erbracht werden; er ist (mittels Determinanten) unschwer zu führen.

[2]) Die Zurückführung eines biegsamen Rotors auf einen starren ist auch dann möglich, wenn die Kreiselwirkung der Scheiben noch zu berücksichtigen ist. Hat die exzentrisch sitzende k-te Scheibe, deren äquatoriales Trägheitsmoment T_k ist, durch eine fehlerhafte Aufkeilung die Neigung ε_k und außerdem infolge der biegsamen Welle die Neigung φ_k, so tritt neben der Zentrifugalkraft $P_k = m_k\,\omega^2\,(f_k + e_k)$ ein Moment auf $M_k = T_k\,\omega^2\,(\varphi_k + \varepsilon_k)$, welches um die zur Biegungsebene senkrechte Schwerpunktsachse zu drehen sucht. Die Durchbiegung und die Neigung der elastischen Linie an der Stelle i sind dann

(Fortsetzung dieser Anmerkung: siehe nächste Seite.)

Trägt man die Abstände L abhängig von der Drehzahl auf, so erhält man ein übersichtliches Bild der Verschiebungen der Unbalanzebenen E, das zu wichtigen praktischen Schlüssen führt. Es sei hier zur Veranschaulichung ein nur aus drei Scheiben von je 88 kg Gewicht bestehender Prüfkörper gewählt, dessen 80 mm starke Welle in zwei Lagern gelagert ist. Sitzen die Scheiben zwischen den Lagern, nach Abb. 9, so findet man zunächst bei wachsender Drehzahl ein Zusammenrücken der Störungskräfte Q bis

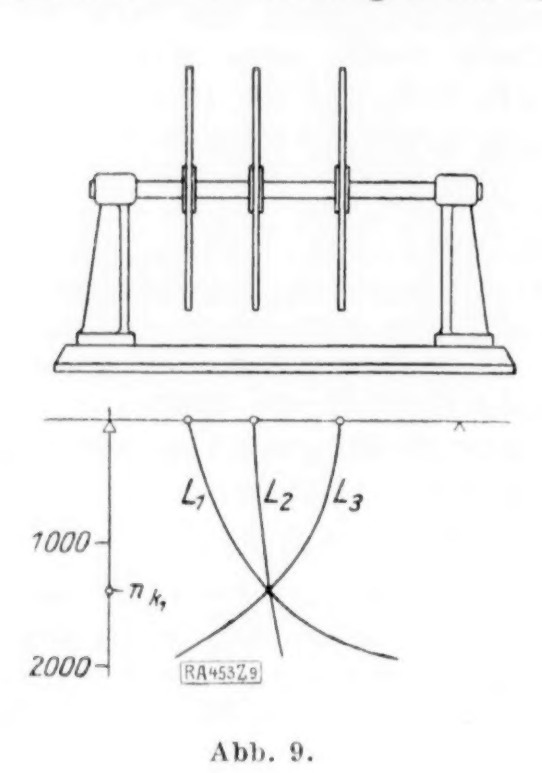


Abb. 9.

Abb. 10.

zum Schnitt der drei L-Kurven bei der kritischen Drehzahl, worauf diese wieder auseinanderstreben. Für den Massenausgleich stellen sich hier innerhalb der Drehzahlen 0 bis 2000

$f_i = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ik} P_k + \beta_{ik} M_k)$ und $q_i = \sum_{k=1}^{n} (\gamma_{ik} P_k + \delta_{ik} M_k)$, mit β, γ, δ als erweiterte Einflußzahlen. Bedeutet $S_k = T_k \omega^2 \varepsilon_k$, so folgt wie leicht einzusehen:

$$P_i = m_i \omega^2 \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} Z_k + B_{ik} S_k) , \qquad M_i = T_i \omega^2 \sum_{k=1}^{n} (C_{ik} Z_k + D_{ik} S_k) ,$$

wo die Beiwerte A, B, C, D, wie oben aus Determinanten zu gewinnen sind. Ermittelt man diejenige Kraft $\overline{Q}_i$, welche durch die Kraft $\overline{Z}_i$ allein ausgelöst wird, so ergibt sich

$$\overline{Q}_i = \omega^2 (\sum_{k=1}^{n} A_{ki} m_k) \overline{Z}_i$$

im Abstand

$$L_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} (A_{ki} l_k m_k + C_{ki} T_k)}{\sum_{k=1}^{n} A_{ki} m_k} .$$

Ebenso ist infolge des Moments $\overline{S}_i$ die Kraft

$$\overline{Q}_i' = \omega^2 (\sum_{k=1}^{n} B_{ki} m_k) \overline{S}_i$$

im Abstand

$$L_i' = \frac{\sum_{k=1}^{n} (B_{ki} l_k m_k + D_{ki} T_k)}{\sum_{k=1}^{n} B_{ki} m_k} .$$

Wie ersichtlich sind auch diese L-Werte vollkommen unabhängig von den Herstellungs- und Montagefehlern e und ε; somit ist die Zurückführung auf einen starren Rotor selbst unter Einschluß der Schiefstellung der Scheiben möglich.

abgesehen von der indifferenten Gegend um n_{k1} keine Schwierigkeiten ein. Sitzt dagegen eine Scheibe außerhalb der Lager nach Abb. 10, so nehmen die L-Kurven einen ganz anderen Verlauf, wobei bemerkenswert ist, daß sich die L_1- und die L_3-Kurve im Punkte A schneiden und bis zum Punkte B sich wenig unterscheiden. Theoretisch ist es unmöglich den Rotor bei der zu A gehörigen Drehzahl von ca. 2150 Touren/min von den Scheiben 1 und 3 aus zu beruhigen, da ihre verlegten Ebenen am starren Rotor zusammenfallen und eine einzige Tarierebene im allgemeinen für den Massenausgleich nicht ausreicht. Praktisch kann aber auch im ganzen Drehzahlbereich von $n = 1800$ bis $n = 2500$ ein Auswuchten an den Scheiben 1 und 3 kaum vorgenommen werden, weil die verlegten Ebenen hier allzunahe bei einander stehen. Soll der Körper bei diesen Drehzahlen ausgewuchtet werden, so kann dies sachgemäß von den Scheiben 1 und 2 aus geschehen. Wie aber ersichtlich sind diese wiederum ungeeignet, sobald ein niedrigerer Drehzahlbereich etwa von $n = 800$ bis $n = 1300$ in Betracht kommt. Dieses einfache Beispiel zeigt also, daß die Sicherung des Ruhelaufs rasch umlaufender Körper auf biegsamen Wellen namentlich bei fliegend angeordneten Massen wie Kupplungen, Erregermaschinen bei Generatoren usw. nicht geringe Schwierigkeiten bereitet und unter Umständen einfach unmöglich ist. Bei der Konstruktion von Turbomaschinen ist deshalb von vornherein besonderer Bedacht auf diese Verhältnisse zu nehmen.

7. Der Massenausgleich des Rotors auf elastischem Fundament. Die oben gemachte Voraussetzung eines absolut festen Fundaments ist insbesondere bei größeren Turbo-Anlagen praktisch unzulässig, weshalb jetzt noch die Möglichkeit des Auswuchtens untersucht werden soll bei elastischer Nachgiebigkeit der die Maschine tragenden Unterlage, wie sie etwa in den häufig verwendeten Säulenfundamenten der stationären Kraftanlagen gegeben ist oder, um ein anderes Beispiel zu nennen, in den Schiffsverbänden, welche die Antriebsturbinen eines Schiffes aufzunehmen haben. Hierdurch wird die Aufgabe streng genommen zu einem Problem der Mechanik der Kontinua, welches jedoch infolge der Ungeschlossenheit der Formgebung — man denke z. B. an die mannigfachen Aussparungen und Durchbrechungen der sogenannten »Tischplatte« eines Säulenfundaments — kaum zu überwindende Schwierigkeiten bietet. Um diese zu vermeiden, und weil für die zu gewinnende Einsicht keine nennenswerten Einschränkungen entstehen, sei zur ersten Annäherung die Elastizität von der Masse getrennt, so daß also z. B. ein Säulenfundament jetzt nur aus einer starren, die Maschine tragenden Platte bestehe, während die Elastizität von der Nachgiebigkeit allein der Säulen herrühre. Mit Bezug darauf, daß ein Rotor mit elastischer Welle bei gegebener Drehzahl durch einen solchen mit unnachgiebiger Welle ersetzt werden kann [1]), liegt angenähert nun das allgemeine Problem so, daß ein sich rasch drehender starrer Körper durch seine Lager und Lagerböcke elastisch gestützt ist, und letztere auf einem für sich gesondert gefederten Fundament befestigt sind, wobei dieses aus seiner eigenen Masse und derjenigen des Maschinenrahmens, des Gehäuses usw. besteht. Mit Rücksicht auf die im System des Rotors enthaltene zyklische Koordinate hat dieses eigentlich nur 5 Grade der Freiheit, welche zusammen mit den 6 Freiheitsgraden des Fundaments 11 Bewegungsgleichungen für das gesamte System fordern, zu deren Aufstellung der Schwerpunktsatz und der Momentensatz benützt werden können. Die augenblickliche Lage des Rotorschwerpunktes sei mit x_0, y_0, z_0 gekennzeichnet, die Verdrehung des Rotors mit φ_0, ψ_0 und die entsprechenden Werte des Fundaments mit X_0, Y_0, Z_0 und Φ_0, Ψ_0, X_0, welche Größen sämtlich dem praktischen Sachverhalt entsprechend äußerst klein sind. Die vektoriellen Gleichungen lauten allgemein

$$m \ddot{\bar{r}}_0 = \Sigma \bar{P}\,, \qquad \frac{d \bar{J}}{d t} = \Sigma \bar{\boldsymbol{M}}\,,$$

wo $\bar{J}$ den Impulsvektor bedeutet, dessen Komponenten sind [2]):

$$J_x = T_x \omega_x - D_{x,y} \omega_y - D_{x,z} \omega_z, \quad J_y = - D_{y,x} \omega_x + T_y \omega_y - D_{y,z} \omega_z, \quad J_z = - D_{z,x} \omega_x - D_{z,y} \omega_y + T_z \omega_z$$

Da mit Rücksicht auf die immerwährende Kleinheit der Ausschläge die Trägheits- und Deviationsmomente als konstant betrachtet werden können, kann die Differentiation nach der Zeit ohne weiteres an den Komponenten von $\bar{J}$ durchgeführt werden, welche

---

[1]) Hier im streng dynamischen Sinne um so mehr, je kleiner die Rotormasse gegenüber der Masse des Fundaments ist.

[2]) Vergl. G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, S. 410.

sich für die Hauptachsen als Koordinatenachsen durch Wegfallen der Deviationsmomente vereinfachen. Beachtet man außer den Rückstellkräften der Federungen noch die bei dem Rotor auftretenden Scheinkräfte und Scheinmomente (Zentrifugalkräfte, gyroskopischen Momente), so vermag man jetzt die Bewegungsgleichungen anzugeben, wenn man sich über den Einfluß der Reibung im klaren ist. Offenbar ist wegen der kleinen Ausschläge die Annahme berechtigt, daß die Widerstände an der Oberfläche proportional dieser und der ersten Potenz der Geschwindigkeit sind. Bedeutet $\overline{P}_r$ die Reibung, $\overline{M}_r$ ihr Moment bezüglich des Körperschwerpunktes und $\overline{a}$ den Vektor von diesem nach dem Oberflächenschwerpunkt, so ist allgemein

$$\overline{P}_r = -\varrho \int \overline{v}\, d f = -\varrho f (\overline{v}_0 + \overline{\omega a}), \qquad \overline{M}_r = -\varrho \int \overline{r v}\, d f = -\varrho f \,\overline{a v_0} - \varrho \int \overline{r(\omega r)}\, df .$$

Es entspricht, wie man sich durch Uebergang zur Koordinatendarstellung leicht überzeugt, diesen Werten die Zerstreuungsfunktion, wenn $v_{0x} \ldots$ die Komponenten von $\overline{v}_0$ usw. sind:

$$F_s = \frac{\varrho}{2} [f (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0x}^2 + 2\, v_{0x} (a_z \omega_y - a_y \omega_z) + 2\, v_{0y} (a_x \omega_z - a_z \omega_x) + 2\, v_{0z} (a_y \omega_x - a_x \omega_y))$$
$$+ a_0 \omega_x^2 + b_0 \omega_y^2 + c_0 \omega_z^2 - 2\, d_0 \omega_y \omega_z - 2\, e_0 \omega_x \omega_z - 2\, f_0 \omega_x \omega_y],$$

wo f die gesamte Körperoberfläche und $a_0\, b_0\, c_0\, d_0\, e_0\, f_0$ die Trägheits- und Deviationsmomente dieser Oberfläche hinsichtlich der Achsen durch den Schwerpunkt sind. Die Bewegungsgleichungen des Fundaments sind somit, wenn M die Masse, $A \ldots$ die Hauptträgheitsmomente, F seine Oberfläche, $A_0 \ldots$ deren Trägheitsmomente usw. bedeuten:

$$M \frac{d^2 X_0}{dt^2} + PF \left(\frac{d X_0}{dt} + a_z \frac{d \Psi_0}{dt} - a_y \frac{d X_0}{dt} \right) + C_{11} X_0 + C_{12} Y_0 + \ldots C_{17} x_0 + C_{18} y_0 + \ldots = 0,$$

$$\vdots$$

$$A \frac{d^2 \Phi_0}{dt^2} + PF \left(- a_z \frac{d Y_0}{dt} + a_y \frac{d Z_0}{dt} \right) + P \left(A_0 \frac{d \Phi_0}{dt} - F_0 \frac{d \Psi_0}{dt} - E_0 \frac{d X_0}{dt} \right) + C_{41} X_0 + \ldots = 0.$$

$$\vdots$$

Aehnliche Gleichungen gelten für den rotierenden Körper, von welchen, mit Hinweis auf die bereits oben aufgestellten Beziehungen, nur die erste hier angeschrieben sei:

$$m \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \varrho f \frac{d x_0}{dt} + \ldots C_{71}' X_0 + C_{72}' Y_0 + \ldots + C_{77}' x_0 + C_{78}' y_0 + \ldots = m \xi_s \omega^2 \cos \omega t - m \eta_s \omega^2 \sin \omega t.$$

Die hinter den Reibungsgliedern stehenden linearen Ausdrücke entsprechen den nach den Achsen genommenen elastischen Rückstellkräften bzw. Rückstellmomenten, wobei wegen des Potentials der Lagerung Symmetrie der Koeffizienten C besteht. Die Berücksichtigung allein der Dauerschwingungen führt zur Lösung für die Fundamentbewegung

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ Y_0 &= A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \\ Z_0 &= A_3 \cos \omega t + B_3 \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad (25). \qquad \left.\begin{aligned} \Phi_0 &= A_I \cos \omega t + B_I \sin \omega t \\ \Psi_0 &= A_{II} \cos \omega t + B_{II} \sin \omega t \\ X_0 &= A_{III} \cos \omega t + B_{III} \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad (26),$$

wo z. B. A_1 von der Form ist

$$A_1 = a_{11} \mu_1 \xi_1 + a_{12} \mu_1 \eta_1 + a_{13} \mu_2 \xi_2 + a_{14} \mu_2 \eta_2 \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

und die B-Werte entsprechende Beschaffenheit haben. Hieraus folgt die Bahn eines beliebigen Punktes P des Fundaments, dessen Koordinaten a, b, c sind:

$$\left.\begin{aligned} X_P &= (A_1 + A_{II} c - A_{III} b) \cos \omega t + (B_1 + B_{II} c - B_{III} b) \sin \omega t \\ Y_P &= (A_2 + A_{III} a - A_I c) \cos \omega t + (B_2 + B_{III} a - B_I c) \sin \omega t \\ Z_P &= (A_3 + A_I b - A_{II} a) \cos \omega t + (B_3 + B_I b - B_{II} a) \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad (28),$$

so daß also jeder Fundamentpunkt eine Ellipse, gelegentlich auch einen Kreis oder eine Gerade beschreibt, was jenen besonderen Schwingungszustand ergibt, von dem neuerdings in der Literatur berichtet wurde[1]). Sofern also die gemachte Voraussetzung der Starrheit

[1]) E. Schmidt, Untersuchungen über Fundamentschwingungen, VDI-Zeitschr. 1923.

einigermaßen zutrifft, kann man sich jetzt leicht eine Vorstellung der eintretenden Fundamentbewegung machen, indem man diese als ungestörte Uebereinanderlagerung der Translationsbewegung X_0, Y_0, Z_0 nach Gl. (25) mit der Schwingbewegung Φ_0, Ψ_0, X_0 nach Gl. (26) ansieht. Während bei der ersteren der Fundamentkörper in jedem Punkt dieselbe elliptische Bahn beschreibt, bewegt er sich hinsichtlich der Schwingbewegung so, als sei er mit einem äußerst flachen elliptischen Kegel fest verbunden, dessen Spitze im Schwerpunkt ist und welcher harmonisch auf der den Winkelvektor[1]) führenden Ebene abrollt. Nimmt man die Ellipse nach Gl. (26), da ihr vom Mittelpunkt ausgehender Radiusvektor proportional dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist, als Spurkurve E_s (Abb. 11), so entspricht dieser eine fast gleiche Ellipse E_P als Leitkurve des Polkegels, dessen Höhe aus der einfachen Ueberlegung folgt, daß sie gleich sein muß der Amplitude irgend eines Punktes der Polellipse E_P, also etwa des Punktes $\Phi_0 = A_I$; $\Psi_0 = A_{II}$; $X_0 = A_{III}$ [2]). Ermittelt man den Betrag dieser Amplitude, so erhält man die Kegelhöhe

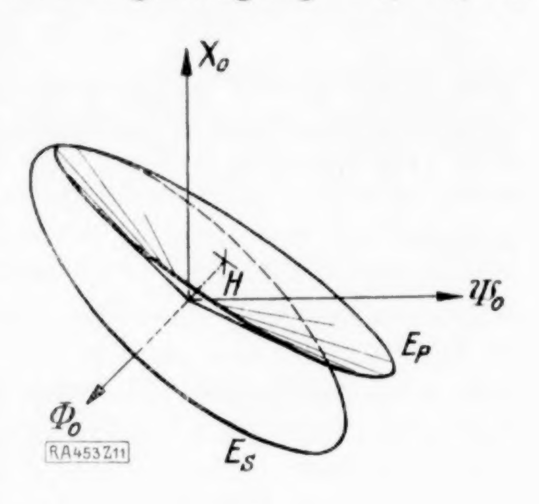


Abb. 11.

$$H = \sqrt{(A_I B_{II} - A_{II} B_I)^2 + (A_{II} B_{III} - A_{III} B_{II})^2 + (A_{III} B_I - A_I B_{III})^2}.$$

Die Bewegung eines starren Fundaments unter dem Einfluß störender Zentrifugalkräfte ist hiernach der Anschauung in leichter Weise zugänglich. — Verfolgt man weiter die Schwingung irgend eines Punktes P des Fundaments oder des Maschinengehäuses, so erkennt man aus Gl. (28) mit Rücksicht auf Gl. (27), daß

$$\begin{aligned}
X_P &= (A_{11}\mu_1\xi_1 + A_{12}\mu_1\eta_1 + A_{13}\mu_2\xi_2 + A_{14}\mu_2\eta_2)\cos\omega t \\
&\quad + (B_{11}\mu_1\xi_1 + B_{12}\mu_1\eta_1 + B_{13}\mu_2\xi_2 + B_{14}\mu_2\eta_2)\sin\omega t, \\
Y_P &= (A_{21}\mu_1\xi_1 + A_{22}\mu_1\eta_1 + A_{23}\mu_2\xi_2 + A_{24}\mu_2\eta_2)\cos\omega t \\
&\quad + (B_{21}\mu_1\xi_1 + B_{22}\mu_1\eta_1 + B_{23}\mu_2\xi_2 + B_{24}\mu_2\eta_2)\sin\omega t, \\
Z_P &= (A_{31}\mu_1\xi_1 + A_{32}\mu_1\eta_1 + A_{33}\mu_2\xi_2 + A_{34}\mu_2\eta_2)\cos\omega t \\
&\quad + (B_{31}\mu_1\xi_1 + B_{32}\mu_1\eta_1 + B_{33}\mu_2\xi_2 + B_{34}\mu_2\eta_2)\sin\omega t,
\end{aligned}$$

d. h. daß die Koeffizienten von $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ lineare homogene Funktionen der Komponenten der Störungsvektoren sind. Hieraus ergibt sich zunächst die bemerkenswerte Tatsache, daß, wenn diese Vektoren im gleichen Verhältnis vergrößert oder verkleinert werden, die Bahnellipse eines jeden Punktes P ihre Ebene beibehält und in demselben Verhältnis linear vergrößert oder verkleinert wird; ferner ergibt sich, daß die Bahn dieses Punktes ganz unabhängig ist von der Lage der Unbalanzvektoren relativ zum Rotor, da dies nur auf eine Verlegung des Zeitbeginns hinausläuft. Hiermit kommt man zu dem wichtigen Ergebnis, daß bei Kenntnis einer Tarierkoppel und durch Heruntertarieren der Schwingungsausschläge irgend eines Punktes (vergl. Abschn. 4) gleichzeitig jeder Punkt des Fundaments oder des Gehäuses schwingungsfrei gemacht, d. h. daß das gesamte erregte System zur völligen Ruhe gebracht wird. Hiermit ist aber das Problem des Massenausgleichs in den Lagern der Maschine auch für den allgemeinen Fall unter Berücksichtigung der Reibung gelöst. — Zur Auffindung der benötigten Tarierkoppel kann man derart verfahren, daß man zunächst nach irgend einer Richtung $\bar{\varepsilon}$ die Schwingungskomponente der Bahnellipse des beliebig wählbaren Punktes P vernichtet, hierauf durch einen willkürlichen Störungsvektor $\mu_I \bar{\varrho}_I$ in der Tarierebene 1 eine Schwingung wieder in Richtung $\bar{\varepsilon}$ erzeugt und diese von der Tarierebene 2 aus durch einen Tariervektor $\mu_{II} \bar{\varrho}_{II}$ nochmals vernichtet. Diese beiden Vektoren kennzeichnen die Tarierkoppel. Sind also für einen rechnungsmäßigen Verfolg $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die Komponenten von $\bar{\varepsilon}$, so ist

$$S_\varepsilon = X_P \varepsilon_x + Y_P \varepsilon_y + Z_P \varepsilon_z$$

[1]) Bei den in Betracht kommenden kleinen Raumschwingungen ist die Verwendung des Begriffs »Winkelvektor« wohl zulässig.

[2]) Diese Koordinaten der Spurellipse bezeichnen offenbar bis auf kleine Größen 2. Ordnung auch einen Punkt der Polellipse.

die in diese Richtung fallende Schwingungskomponente von P; oder in den Komponenten der Störungsvektoren ausgedrückt:

$$S_\varepsilon = (a_1\,\mu_1\,\xi_1 + a_2\,\mu_1\,\eta_1 + a_3\,\mu_2\,\xi_2 + a_4\,\mu_2\,\eta_2)\cos\omega t$$
$$+ (b_1\,\mu_1\,\xi_1 + b_2\,\mu_1\,\eta_1 + b_3\,\mu_2\,\xi_2 + b_4\,\mu_2\,\eta_2)\sin\omega t.$$

Um diese Größe wegzutarieren hat man nur nach dem oben angegebenen Verfahren des Ausschlagminimums vorzugehen, indem man nach Abb. 12 die Größe S_ε als Projektion von OS darstellt. Falls die Tarierebene 1 zum Ausgleich genommen wird, sind solange

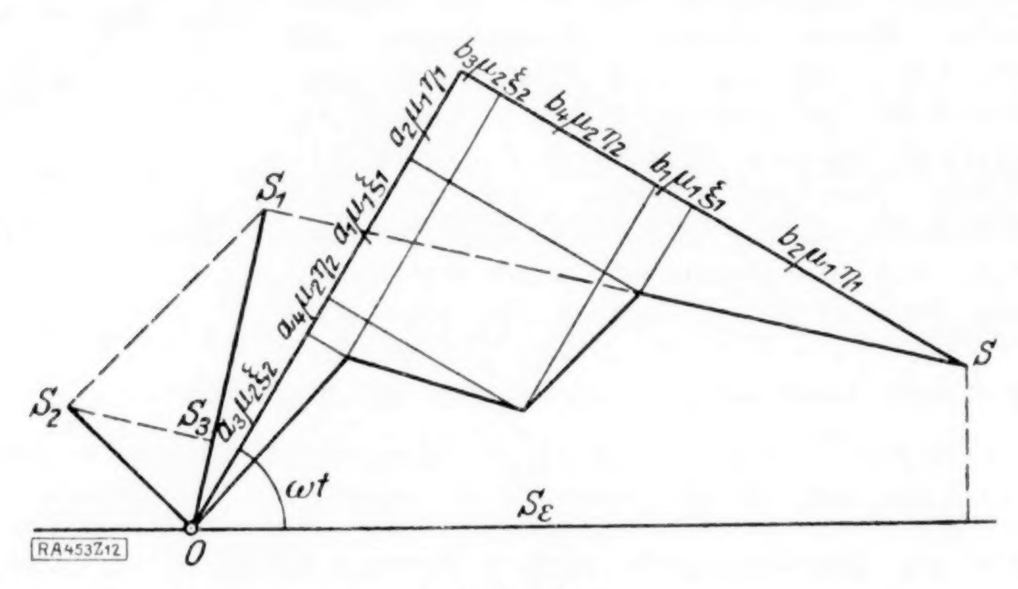


Abb. 12.

Tarierkomponenten $\mu_1'\,\eta_1'$ auf dem Ende eines beliebigen Durchmessers aufzulegen, bis das Amplitudenminimum OS_1 erreicht ist. Durch Einsetzen entsprechender Tarierkomponenten $\mu_1'\,\xi_1'$ auf einem zu dem gewählten senkrechten Durchmesser erhält man das zweite Amplitudenminimum OS_2 und indem man wieder auf den ersten Durchmesser übergeht OS_3 usw. wobei zu bemerken ist, daß man im allgemeinen mit zwei, bei besonders großer Reibung mit drei Minimabestimmungen auskommt.

Die vorliegenden Betrachtungen wurden nicht ohne eingehende Versuche mit rotierenden Körpern auf festen und beweglichen Fundamenten durchgeführt. Es wurde zunächst zum Zwecke des leichteren Nachprüfens der Ergebnisse und zum weiteren Studium dieses technisch wichtigen Problems der in Abb. 13 dargestellte Apparat angefertigt, welcher im wesentlichen aus einem durch Scheiben gebildeten Rotor besteht, der mittels biegsamer Welle von einem Elektromotor unter Einhaltung jeder beliebigen Drehzahl angetrieben werden kann. Die horizontal schwingenden Böcke tragen Lager, welche mittels elastischer Unterlagen noch vertikal sich zu bewegen vermögen, so daß das System vier Grade der Freiheit besitzt. Dieser Apparat, bei welchem durch Einsetzen von kleinen Gewichten am Umfang der Scheiben beliebige Störungsvektoren hervorgebracht werden können, zeigt deutlich die rechnerisch gefundenen Ergebnisse, so die Resonanzerscheinungen und vor allen Dingen die Möglichkeit des Massenausgleichs nach den hier angegebenen Verfahren. Praktisch wurde ferner das Auswuchten mit gutem Erfolg durchgeführt an einer Reihe von Turbogeneratoren und von sonstigen raschlaufenden Maschinen wie Turbokompressoren, Hochfrequenzmaschinen usw., deren unruhiger Gang sonst Veranlassung zu dauernden Störungen gegeben hätte, und wobei die offensichtlich nicht ganz einfache physikalische Aufgabe gelöst werden mußte, zwischen dem fortlaufenden Betrieb an den langgebauten, häufig 10 000 kg und darüber schweren Rotoren diejenigen Stellen ausfindig zu machen, an welchen die unbekannten, nur nach Grammen wiegenden Fehlgewichte einzusetzen waren.

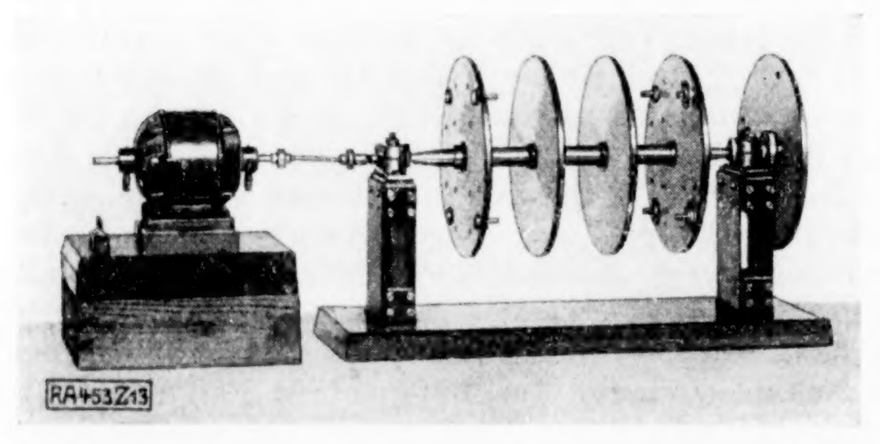


Abb. 13.

Projektive Aufgaben einer darstellenden Geometrie des Strahlenraumes.

Von **FRITZ REHBOCK** in Berlin.

Die folgenden Untersuchungen schließen sich unmittelbar an meine frühere Arbeit über »Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie«[1]) an, die jetzt kurz durch die Ziffer I bezeichnet werden soll[2]). In jener Arbeit wurde gezeigt, daß die allgemeinste lineare Abbildung des Strahlenraumes auf die Elemente eines Bündels oder Feldes π unter Zuhilfenahme einer »projizierenden« Regelschar 2. Ordnung (S) erzeugt wird und daß die zur Schar (S) konjugierte Schar (T) die Rolle einer singulären Strahlenmannigfaltigkeit einnimmt. Bei der Zentralprojektion artet projizierende und singuläre Schar aus in das Strahlenbündel des Projektionszentrums m, beim Spurenriß in das Strahlenfeld der Spurebene π, so daß sich die in der darstellenden Geometrie verwendeten Risse jener allgemeinen Auffassung einordnen lassen. Von besonderem Interesse ist der »Hauptriß«, auf den die allgemeinsten Risse durch Kollineation zurückgeführt werden. Er entsteht, indem man dem Strahl P jenen π-Strahl P' als Bild zuordnet, der einer P enthaltenden »$\mathfrak{S}$-Kongruenz« angehört. Dabei ist eine $\mathfrak{S}$-Kongruenz eine lineare Strahlenkongruenz, die zwei Strahlen der Schar (S) zu Brennlinien hat. Im Folgenden soll nunmehr durch Verbindung mehrerer allgemeiner Strahlenrisse im selben Bildgebiet eine ein-eindeutige Abbildung des Strahlenraumes hergestellt werden. In einem solchen Rißsystem sind dann unter Verwendung gewisser, von vornherein gegebener »Fundamentalelemente« die rein projektiven Raumaufgaben zu lösen, und zwar dadurch, daß die Bilder der linearen Strahlenmannigfaltigkeiten in Form wohlbestimmter Verwandtschaften angegeben werden. Alle Bezeichnungen werden, ohne nochmalige Erklärung, aus jener ersten Arbeit übernommen.

1. Kapitel: Die Verbindung eines allgemeinen Strahlenrisses mit einem Spurenriß.

1. Das Prinzip der Abbildung. 1. Bevor wir die Theorie mehrerer allgemeiner Abbildungen behandeln, wollen wir eine derartige Abbildung mit einer speziellen, nämlich einem durch die Bildebene π erzeugten Spurenriß verbinden. In bezug auf ein Fundamentaldreieck in π, dessen Ecken auf der Spurkurve von (S) gewählt seien, hat das erste Bild, nämlich der Spurpunkt p des Strahles P (nach I, § 6, Gl. (7)) die Koordinaten

$$\sigma p_1 = -P_5 \qquad \sigma p_2 = P_4 \qquad \sigma p_3 = P_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

der $\mathfrak{S}$-Riß P' oder das zweite Bild von P die Koordinaten (nach I, § 6, Gl. (16))

$$\left.\begin{array}{llllll} \varrho P_1' = S_{11} P_4 & * & * & * & + P_2 & + S_{16} P_3 \\ \varrho P_2' = \quad * & S_{22} P_5 & * & - P_1 & * & + S_{26} P_3 \\ \varrho P_3' = S_{31} P_4 & + S_{32} P_5 & - P_6 & * & * & * \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Ist ein Bildpaar p, P' gegeben, so lassen sich aus beiden Systemen die Koordinaten P_i eines Originalstrahles durch die noch unbestimmten Faktoren ϱ und σ ausdrücken. $L(P, P) = 0$ liefert für $\varrho : \sigma$ die quadratische homogene Gleichung

$$\sigma \left\{ \varrho \sum_{\varkappa=1}^{3} P_\varkappa' p_\varkappa + \frac{\sigma}{2} \sum_{\varkappa, \lambda=1}^{3} \alpha_{\varkappa\lambda} p_\varkappa p_\lambda \right\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

wobei die $\alpha_{\varkappa\lambda}$ Elemente der Diskriminantenmatrix $\mathfrak{S}^0 + \mathfrak{S}^{0\prime} = \{\alpha_{\varkappa\lambda}\}$ der Fundamentalkurve $\varDelta$ bedeuten.

Eine Lösung von (3) ist $\sigma = 0$, $\varrho = 1$. Sie bestimmt den Strahl mit den Koordinaten

$$P_1 = -P_2' \qquad P_2 = P_1' \qquad P_3 = P_4 = P_5 = 0 \qquad P_6 = -P_3',$$

also den Strahl $P = P'$. Bei der allgemeinen Deutung des Spurenrisses (I, § 4, 5) ist die Gesamtheit der π-Strahlen singulär, und einem solchen Strahl sind alle π-Punkte als Bilder zuzuordnen. Dem entspricht es, daß $P = P'$ als ein Original des Bildpaares p, P' aufzufassen ist. Vereinbaren wir aber, wie das gewöhnlich geschieht, daß einem π-Strahl nur die mit ihm vereinigten Punkte als »Spurpunkte« zuzuordnen sind, so kommt P' auch

[1]) Diese Zeitschrift Bd. 6 (1926), S. 376 ff.

[2]) Hinweise auf Sätze und Abbildungen der vorliegenden Arbeit werden im Text durch II bezeichnet.

nicht als Original eines nicht vereinigt liegenden Bildpaares p, P' in Frage. ϱ und σ ergeben sich dann bis auf einen von 0 verschiedenen Faktor aus der linearen Gleichung

$$\varrho \Sigma P_\varkappa' p_\varkappa + \frac{\sigma}{2} \Sigma \alpha_{\varkappa\lambda} p_\varkappa p_\lambda = \varrho A + \frac{\sigma}{2} B = 0,$$

wenn zur Abkürzung $\Sigma P_\varkappa' p_\varkappa = A$ und $\Sigma \alpha_{\varkappa\lambda} p_\varkappa p_\lambda = B$ gesetzt wird.

Wenn $A = 0$ und zugleich $B = 0$, wenn also P' durch den auf Δ angenommenen Punkt p geht, so kann $\varrho : \sigma$ jeden Wert annehmen; für das Original P kommt dann eine lineare Strahlenmannigfaltigkeit in Frage, nämlich (nach I, Satz 8) die Strahlen des durch P' und den T-Strahl T durch p bestimmten Büschels $P'T$. In jedem anderen Fall bestimmt ein Bildpaar p, P' nur einen Strahl P, falls die Matrix $\{\alpha_{\varkappa\lambda}\}$ nicht $= \{0\}$ ist[1]). Nur wenn eine Zentralprojektion vorliegt, die wir wieder in dem allgemeinen Sinne unserer Theorie deuten, verschwindet B identisch, weil alle $\alpha_{\varkappa\lambda} = 0$ werden. Das Spurgebiet Δ von $\mathfrak{S}$ besteht jetzt aus allen π-Punkten. Bei der Elementarbehandlung der Zentralprojektion pflegt man nun zu sagen, daß Zentralriß und Spurpunkt vereinigt gewählt werden müssen. Vom Standpunkt unserer Theorie ist das nur jener Sonderfall $A = 0$, $B = 0$, und daher erklärt es sich, daß man durch Herausgreifen dieses Falles, also durch ein vereinigt liegendes Bildpaar p, P', bei den in der darstellenden Geometrie verwendeten Zentralprojektionen den Raumstrahl noch nicht eindeutig festlegen kann. Die Fälle $A \neq 0$, $B \neq 0$ und $A = 0$, $B \neq 0$ sind hier freilich nicht möglich, weil es keinen Δ nicht angehörenden Punkt p gibt. Wohl aber darf man ein nicht vereinigtes Bildpaar wählen ($A \neq 0$, $B = 0$) und erhält als Original dann eindeutig den durch p und das Zentrum der Zentralprojektion gehenden Strahl.

2. Wir wenden uns der Abbildung zweier sich schneidender Raumstrahlen P und Q zu. In die Schnittbindungsgleichung $L(P, Q) = 0$ setze man die durch die Bildkoordinaten ausgedrückten Werte P_ι und Q_ι ein. Sind ϱ, σ die dem Paare P', p und ϱ', σ' die dem Paare Q', q zugeordneten Faktoren, so ergibt sich

$$\varrho\sigma' \sum_{\varkappa=1}^{3} P_\varkappa' q_\varkappa + \varrho'\sigma \sum_{\varkappa=1}^{3} Q_\varkappa' p_\varkappa + \sigma\sigma' \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{3} \alpha_{\varkappa\lambda} p_\varkappa q_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Durch Elimination von $\varrho : \sigma$ und $\varrho' : \sigma'$ folgt hieraus:

$$\Sigma P_\varkappa' q_\varkappa \cdot \Sigma Q_\varkappa' q_\varkappa \cdot \Sigma \alpha_{\varkappa\lambda} p_\varkappa p_\lambda + \Sigma Q_\varkappa' p_\varkappa \cdot \Sigma P_\varkappa' p_\varkappa \, \Sigma \alpha_{\varkappa\lambda} q_\varkappa q_\lambda - 2 \Sigma \alpha_{\varkappa\lambda} p_\varkappa q_\lambda \cdot \Sigma P_\varkappa' p_\varkappa \cdot \Sigma Q_\varkappa' q_\varkappa = 0 \quad (5).$$

Bei gegebenem p, P' und Q' liefert also (5) eine quadratische homogene Gleichung für die $q_\varkappa$, so daß q aus den Punkten einer gewissen Kurve zweiter Ordnung gewählt werden muß. Sind nämlich S_1 und S_2 die zu Q' gehörenden $\mathfrak{S}$-Strahlen, so darf ja Q nur genommen werden aus der Regelschar $[P, S_1, S_2]$. Die Spurkurve (q) dieser Schar ist — wie Gleichung (5) besagt — außer von den gewählten Elementen p, P' und Q' nur noch von der Matrix $\{\alpha_{\varkappa\lambda}\}$, d. h. nur vom Spurgebiet Δ von $\mathfrak{S}$, nicht aber von $\mathfrak{S}$ selber abhängig.

Gibt man p, P' und q, so liefert (5) ein Strahlenbüschel für Q', offenbar den $\mathfrak{S}$-Riß q_P des Büschels jener Strahlen, die durch q gehen und P schneiden. Aus dieser linearen Mannigfaltigkeit ist also Q' zu wählen. Auch q_P hängt außer von p, P' und q nur von der Matrix $\{\alpha_{\varkappa\lambda}\}$ ab.

Im nächsten Paragraphen soll gezeigt werden, wie man jene Gesamtheiten (q) und $q_P = (Q')$ konstruiert.

3. Bei den folgenden Untersuchungen ist es oft zweckmäßig, von einem gegebenen Bildpaar p, P' zu dem »konjugierten« Riß $\overline{P}$ des Strahles P überzugehen, d. h. zu jenem Riß, der durch Projektion mittels der Schar $\mathfrak{T}$ entsteht. Er muß, wenn wir wieder vom Spezialfall $A = 0$, $B = 0$ absehen, eindeutig bestimmbar sein. Sind S_1 und S_2 die durch die $\mathfrak{S}$-Punkte (Abb. 1) von P gehenden $\mathfrak{S}$-Strahlen, T_1 und T_2 die $\mathfrak{T}$-Strahlen durch dieselben Punkte, so liegen S_1, T_2 und P in einer Ebene, also die zugehörigen Spurpunkte p_1', $\overline{p_2}$ und p auf einer Geraden; und ebenso liegen S_2, T_1 und P in einer Ebene und daher wiederum die entsprechenden Spurpunkte p_2', $\overline{p_1}$ und p auf einer Geraden. Daraus ergibt sich unmittelbar die Konstruktion für $\overline{P}$, bei der man darauf achte, daß

[1]) Die durch Uebereinanderschreiben der abbildenden Matrizen entstehende Matrix hat den Rang 6. Daher kann auch nach I, § 8, 1 einem Bildpaar nur ein Strahlenpaar entsprechen (von dem in unserem Fall ein Strahl ausgeschieden wird), oder ein Büschel von Strahlen.

die $\varDelta$-Punkte mit verschiedenen Indizes stets mit p in einer Geraden liegen. Elementarüberlegungen zeigen, daß bei festgehaltenem p die durch diese Konstruktion definierte Verwandtschaft $P' \longleftrightarrow \overline{P}$ eine Perspektivität ist, die p zum Zentrum und die Polare von p in bezug auf $\varDelta$ zur Achse hat. Damit ist die Möglichkeit gegeben bei reellem $\varDelta$ auch dann $\overline{P}$ zu zeichnen, wenn P' imaginäre $\varDelta$-Punkte hat.

2. Die Abbildung des ausgearteten linearen Komplexes. 1. Es sollen die Bildpaare aller Strahlen bestimmt werden, die einen durch Spurpunkt p und $\mathfrak{S}$-Riß P' gegebenen Raumstrahl P schneiden. Wir betrachten ein dem Komplex P angehörendes Hauptbüschel[1]) (Q), dessen nicht in π liegende Strahlen also den gemeinsamen Spurpunkt q haben. Sein $\mathfrak{S}$-Riß ist ein Strahlbüschel mit dem Träger q_p, und wir wollen zunächst die Verwandtschaft zwischen q und q_p ermitteln. Können wir zu einem gegebenen q das zugehörige q_p angeben, so stellt jeder π-Strahl Q' durch q_p zusammen mit q das Bildpaar eines P schneidenden Strahles dar.

Es liege zunächst p weder auf der gegebenen Fundamentalkurve $\varDelta$ noch auf p'.

Es seien p_1', p_2' die $\varDelta$-Punkte von P', $\overline{p}_1$ und $\overline{p}_2$ die konjugierten $\varDelta$-Punkte. Sie sind aufzufassen als die Spurpunkte der projizierenden bzw. singulären Strahlen, die durch die $\mathfrak{S}$-Punkte p_1 und p_2 von P gehen. Das Büschel $[q, P]$ bestimmt ein Feld ε, dessen π-Strahl $E = qp$ die $\varDelta$-Punkte e_1 und e_2 besitze. Die in ε gelegene Büschelreihe E wird durch $\mathfrak{S}$ abgebildet in eine zu ihr projektive Punktreihe auf E, und zwar der Büschelpunkt e_1 in e_1, e_2 in e_2, $p = PE$ in $p' = P'E$. Wir sind also in der Lage, die Projektivität zwis hen den beiden E-Reihen in ε und π zu vervollständigen und so das zweite Bild q_p des Büschels $[q, P]$ auf E festzulegen.

Läuft q auf einer nicht durch p gehenden Geraden Q_1 in π, so dreht sich $[q, p]$ zugleich um P, beschreibt also eine der »Büschelreihen« der Kongruenz $[P, Q_1]$. Diese Büschelreihe wird nach I, Satz 10 in eine zu ihr projektive Punktreihe zweiter Ordnung (q_p) abgebildet. Die Verwandtschaft $q \longleftrightarrow q_p$ ist also eine ein-eindeutig quadratische.

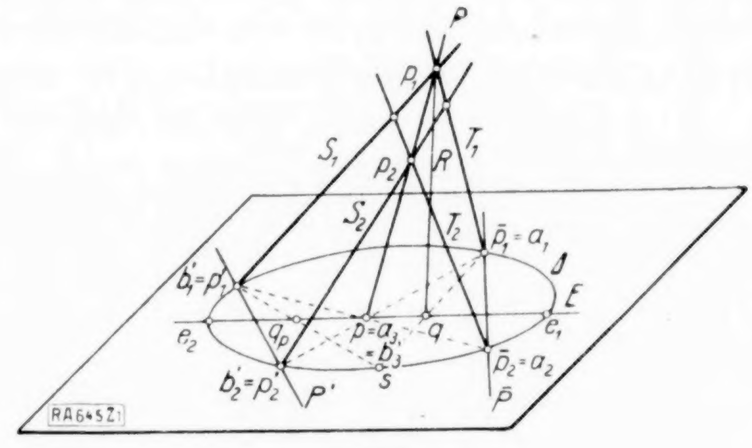


Abb. 1.

In jedem der Felder (q) und (q_p) gibt es drei singuläre Punkte, die sogenannten Hauptpunkte[2]) a_1, a_2, a_3 bzw. b_1', b_2', b_3'. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß dem Punkt $a_\varkappa$ des q-Feldes alle Punkte der gleichnamigen »Hauptgeraden« $B_\varkappa' = b_\lambda' b_\mu'$ des q_p-Feldes und dem Punkt $b_\varkappa'$ des q_p-Feldes alle Punkte der Hauptgeraden $A_\varkappa = a_\lambda a_\mu$ des q-Feldes entsprechen ($\varkappa$, λ, μ = Permutation von 1, 2, 3).

Diese Hauptpunkte lassen sich leicht ermitteln. Rückt q auf einem beliebigen Strahle E nach p, so wird $q_p = p' = EP'$. Dem Punkt p des q-Feldes sind also alle Punkte von P' zugeordnet, so daß wir etwa $p = a_3$, $P' = B_3'$ setzen können. Wählt man ferner q auf $p_1'p$ (Abb. 1), so schneiden alle Strahlen des Büschels $[q, P]$ den durch p_1 gehenden projizierenden Strahl $p_1 p_1'$, so daß q_p nach p_1' fällt. Allen Punkten q auf $p_1'p$ entspricht also der Punkt p_1' ebenso allen Punkten auf $p_2'p$ der Punkt p_2'. $p_1' = b_1'$ und $p_2' = b_2'$ sind mithin die auf $B_3' = P'$ gelegenen Hauptpunkte des q_p-Feldes, $p_1'p = A_1$ und $p_2'p = A_2$ die durch $a_3 = p$ gehenden Hauptgeraden des q-Feldes. Auf A_1 haben wir den Hauptpunkt a_2, auf A_2 den Hauptpunkt a_1 zu suchen. Wird nun $q = \overline{p}_1$, so enthält das Büschel $[q, P]$ den durch p_1 gehenden singulären Strahl $p_1 \overline{p}_1$, alle seine Strahlen werden mithin durch $\mathfrak{S}$ in seinen π-Strahl $p\overline{p}_1$ abgebildet, und jeder Punkt von $p\overline{p}_1$ kann also als Bild des Büschels $[\overline{p}_1, P]$ aufgefaßt werden. Ebenso wird dem Punkt $q = \overline{p}_2$ jeder Punkt von $p\overline{p}_2$ als q_p zugeordnet. Wir setzen deshalb $p\overline{p}_1 = B_1$, $p\overline{p}_2 = B_2$, $\overline{p}_1 = a_1$, $\overline{p}_2 = a_2$, also schließlich $\overline{P} = A_3$, $p = b_3$.

Zwischen den gleichnamigen Büscheln $a_\varkappa$ und $b_\varkappa'$ besteht bekanntlich eine Projektivität derart, daß dem Strahl $a_\varkappa q$ der Strahl $b_\varkappa' q_p$ entspricht. Da $\varDelta$ die Koinzidenz-

[1]) Vergl. I, Satz 8.
[2]) Vergl. etwa Doehlemann, Geometrische Transformationen, Band II, § 1.

kurve der quadratischen Verwandtschaft ist, so erhält man q_p, indem man etwa $a_1 q$ mit Δ in s und $b_1's$ mit $E = qp$ in dem gesuchten Bildpunkt q_p schneidet. Diese Konstruktion läßt sich auch durch eine räumliche Ueberlegung gewinnen: Ist $R = qp_1$, so kann man $R' = \mathfrak{S}R$ angeben. Denn außer dem Spurpunkt $r = q$ ist der Δ-Punkt $r_1' = p_1'$ und der konjugierte Δ-Punkt $\bar{r}_1 = \bar{p}_1$ bekannt. Daher wird $r_2' = s$, $R' = sp_1'$ und $q_p = R'E$.

Die Konstruktion für q_p läßt sich in dieser einfachen Weise nicht durchführen, wenn beispielsweise die Hauptpunkte a_1, a_2, b_1', b_2' imaginär werden. In diesem Fall muß man auf jeder Geraden E durch p die Projektivität $e_1, e_2, p \rightarrow e_1, e_2, p'$ nach anderen bekannten Methoden der projektiven Geometrie vervollständigen.

2. Es bleibt nun die umgekehrte Aufgabe zu lösen. Gegeben ist ein $\mathfrak{S}$-Riß Q'; es sollen die Spurpunkte q aller Strahlen Q bestimmt werden, die Q' zum $\mathfrak{S}$-Riß haben und P schneiden. Diese Strahlen bilden die Regelschar, die die zu Q' gehörenden $\mathfrak{S}$-Strahlen und P zu Leitstrahlen hat; ihre Spurkurve (q) geht daher durch p und die Δ-Punkte q_1' und q_2' von Q'. Da die durch p_1 und p_2 gehenden $\mathfrak{T}$-Strahlen die durch q_1' und q_2' gehenden $\mathfrak{S}$-Strahlen schneiden, so gehören auch diese $\mathfrak{T}$-Strahlen zu der betrachteten Regelschar. Ihre Spurpunkte sind $\bar{p}_1$ und $\bar{p}_2$, so daß die zu Q' gehörende Kurve (q) durch die fünf Punkte $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, p, q_1', q_2' gegeben ist.

Vom Standpunkt der quadratischen Verwandtschaft ist dieses Ergebnis ebenfalls evident, da der Geraden Q' des q_p-Feldes ein Kegelschnitt im q-Felde entsprechen muß, der durch die Hauptpunkte des q-Feldes sowie durch die sich selbst entsprechenden Punkte von Q' geht. Geht Q' durch einen der Punkte $b_\varkappa'$, so zerfällt der Kegelschnitt in $A_\varkappa$ und den durch $a_\varkappa$ gehenden Strahl, der in der Projektivität zwischen den Büscheln $b_\varkappa'$ und $a_\varkappa$ dem Strahl Q' entspricht.

Satz 1. *Es sei gegeben ein Raumstrahl P durch seinen Spurpunkt p und seinen »$\mathfrak{S}$-Riß« P', der erzeugt sei durch eine einparametrige*[1] *Regelschar $\mathfrak{S}$ mit der Spurkurve Δ. Es sei ferner $q_p = \mathfrak{P}'q$ diejenige ein-eindeutige quadratische Verwandtschaft, die $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, p zu Hauptpunkten des q-Feldes, p_1', p_2', p zu den gleichnamigen Hauptpunkten des q_p-Feldes und Δ zur Koinzidenzkurve hat.*

Gibt man den Spurpunkt q eines P schneidenden Raumstrahls beliebig, so muß der zugehörige $\mathfrak{S}$-Riß Q' durch den Punkt $q_p = \mathfrak{P}'q$ gewählt werden. Ist dagegen Q' gegeben, so ist der zugehörige Spurpunkt q auf dem Kegelschnitt $(q) = \mathfrak{P}'^{-1}Q'$ zu wählen, d. h. auf jenem Kegelschnitt des q-Feldes, der der Punktreihe Q' des q_p-Feldes entspricht, und der also durch die Punkte $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, p sowie die Δ-Punkte von Q' geht.

3. Liegt der Fall vor, daß p entweder auf Δ oder auf P' liegt, so artet — wie man leicht erkennt — die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{P}'$ dadurch aus, daß die Hauptpunkte teilweise zusammenfallen. Der Satz 1 behält seine Gültigkeit. Wir wollen hier nur noch auf den in § 1, 1 erwähnten Spezialfall eingehen, bei dem p auf Δ und mit P' vereinigt liegt. Er ist deshalb wichtig, weil er sich auf die durch Spurpunkt und $\mathfrak{S}$-Riß noch nicht eindeutig dargestellten Strahlen bezieht. Denn ist T_1 der $\mathfrak{T}$-Strahl durch p, so haben alle Strahlen des Büschels $T_1 P'$ dasselbe Bildpaar p, P'. Wir können einen Strahl dieses Büschels dadurch eindeutig festlegen, daß wir seinen konjugierten Riß $\bar{P}$ beliebig durch p wählen. Ist speziell P' Tangente an Δ, so kann p, P' auch das Bildpaar des durch p gehenden $\mathfrak{S}$ Strahles sein. Das wird dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man $\bar{P}$ beliebig, also auch nicht durch p wählt, denn $\bar{P}$ ist ja jetzt in bezug auf die konjugierte Abbildung singulär.

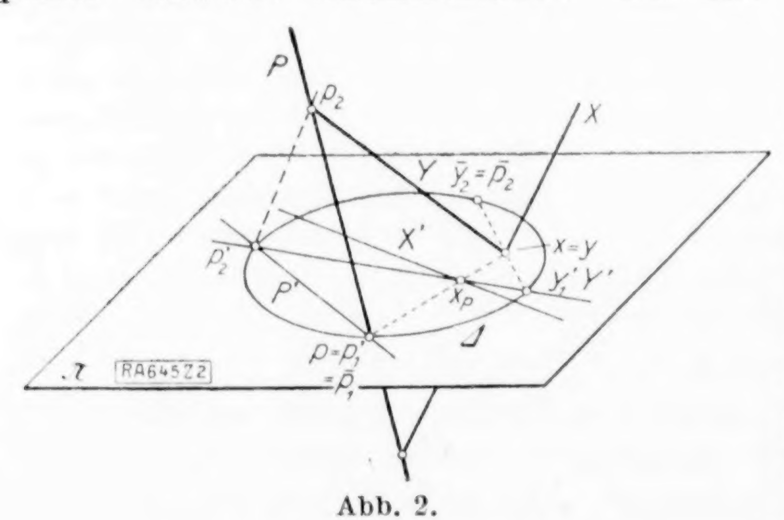


Abb. 2.

Wir können Eineindeutigkeit aber auch dadurch erreichen, daß wir das Bildpaar x, X' eines P schneidenden Strahles beliebig geben. In diesem Fall läßt sich der kon-

[1]) Eine Zentralprojektion ist also nicht zulässig, da durch sie und die Spurpunkte i. a. noch keine Eineindeutigkeit erzielt wird. Vergl. II, § 1. 1.

jugierte Riß $\bar{P}$, der zur Bestimmung der Verwandtschaft $\mathfrak{P}'$ nötig ist, so ermitteln. Es sei (Abb. 2) $p = p_1' = \bar{p}_1$ und p_2' der von p verschiedene Schnittpunkt $P'\varDelta$. Das Büschel $[x, P]$ hat zum $\mathfrak{S}$-Riß den Punkt $x_p = xpX'$. Der Strahl Y, der von x zu dem nicht auf $\varDelta$ gelegenen $\mathfrak{S}$-Punkt p_2 von P führt, wird in $Y' = x_p p_2'$ abgebildet. Aus Y' und dem zugehörigen Spurpunkt $x = y$ ergibt sich $\bar{y}_2$, und dieser Punkt ist, als Spurpunkt des durch $y_2 = p_2$ gehenden $\mathfrak{T}$-Strahles, zugleich der noch fehlende Punkt $\bar{p}_2$.

3. Die Abbildung der linearen Kongruenz. a) Die nicht ausgeartete Kongruenz. 1. Es seien zwei windschiefe Strahlen F und G durch ihre Bildpaare f, F' und g, G' gegeben. Es sollen die Bildpaare q, Q' aller F und G schneidenden Strahlen bestimmt werden. Durch einen von f und g verschiedenen π-Punkt q gibt es nur einen der Kongruenz $[F, G]$ angehörenden Strahl Q. Sind $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{G}'$ die den Bildpaaren von F und G nach Satz 1 zugeordneten quadratischen Verwandtschaften, so ist der $\mathfrak{S}$-Riß Q' jenes Strahles Q die Verbindungsgerade der Punkte $q_f = \mathfrak{F}'q$ und $q_g = \mathfrak{G}'q$. Eine Ausnahme bilden die Punkte f und g. Durch jeden von ihnen geht ein Büschel von Strahlen, die der Kongruenz angehören. Dem Punkt $q = f$ sind also zugeordnet alle Strahlen Q' des Büschels $f_g = \mathfrak{G}'f$, dem Punkte $q = g$ alle Strahlen des Büschels $g_f = \mathfrak{F}'g$.

Für einen auf $\varDelta$ liegenden Punkt q versagt die Konstruktion, weil jetzt q_f und q_g mit q zusammenfallen. Trotzdem wird Q' nicht etwa unbestimmt; denn auch durch einen solchen Punkt q gibt es ja nur einen Kongruenzstrahl. Wir werden uns in diesem Fall Q' durch eine andere Ueberlegung verschaffen (§ 3, 3).

2. Zuvor aber lösen wir die umgekehrte Aufgabe: Es ist der $\mathfrak{S}$-Riß Q' eines Kongruenzstrahles Q gegeben, und man soll die in Frage kommenden Spurpunkte q ermitteln. Die Aufgabe hat zwei Lösungun q_I und q_{II}, wenn die Strahlen F, G und die zu Q' gehörenden $\mathfrak{S}$-Strahlen S_1, S_2 zwei Transversalen Q_I und Q_{II} besitzen; sie hat eine ein- oder zweidimensionale Lösungsschar, wenn jene vier Strahlen einer Regelschar angehören. Nach Satz 1 müssen die gesuchten Spurpunkte liegen auf dem durch die Punkte $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, f, q_1', q_2' bestimmten Kegelschnitt $(q)_I = \mathfrak{F}'^{-1}Q'$ und auf dem durch die Punkte $\bar{g}_1$, g_2, g, q_1', q_2' bestimmten Kegelschnitt $(q)_{II} = \mathfrak{G}'^{-1}Q'$. Sind diese Kegelschnitte verschieden, so bestimmt jeder ihrer von q_1' und q_2' verschiedenen Schnittpunkte q_I und q_{II} zusammen mit Q' das Bildpaar eines und nur eines Strahles der Kongruenz $[F, G]$. Dagegen kommen i. a. die den Kurven $(q)_I$ und $(q)_{II}$ gemeinsamen Punkte q_1' und q_2' nicht als Spurpunkte von Kongruenzstrahlen in Frage. Zwar bestimmen auch q_1' und Q' das Bildpaar eines F schneidenden und das Bildpaar eines G schneidenden Strahles; doch brauchen diese beiden Strahlen nicht identisch zu sein, da durch ein derartiges Bildpaar der Raumstrahl noch nicht eindeutig festgelegt ist (§ 1, 1 und § 2, 3). Natürlich können auch einmal q_I und q_{II} mit q_1' oder q_2' zusammenfallen. Fallen die Kegelschnitte $(q)_I$ und $(q)_{II}$ zusammen, so bedeutet das jenen schon erwähnten Fall, daß F, G, S_1 und S_2 eine Regelschar von Transversalen mit der Spurkurve $(q)_I \equiv (q)_{II}$ besitzen. Jeder Punkt dieser Kurve bestimmt mit Q' zusammen das Bildpaar eines Kongruenzstrahles.

Die Verwandtschaft $q \longleftrightarrow Q'$ ist also, von Ausnahmeelementen abgesehen, einzweideutig. Lassen wir q eine Gerade in π durchlaufen, so beschreibt das zugehörige Q eine Regelschar, also Q' nach I, Satz 12, eine Kurve zweiter Klasse. Die Verwandtschaft ist mithin quadratisch. In speziellen Fällen kann diese quadratische Verwandtschaft ausarten, beispielsweise dann, wenn F und G zwei $\mathfrak{S}$-Strahlen sind.

Satz 2. Zwischen den ersten und den zweiten Bildern der Strahlen einer linearen Kongruenz mit den Brennstrahlen F und G besteht eine einzweideutige quadratische Punkt Geraden-Verwandtschaft, deren Konstruktionsgesetz durch $\varDelta$ und die Bildpaare f, F' und g, G' festgelegt ist.

3. Die Verwandtschaft $q \longleftrightarrow Q'$ läßt sich auch durch die folgende, für manche Zwecke nützliche Ueberlegung gewinnen. Nach I, Satz 10, werden die Büschelreihen der Kongruenz $[F, G]$ durch $\mathfrak{S}$ abgebildet in zwei zu ihnen projektive Punktreihen auf demselben Kegelschnitt $\varGamma$. Dieser enthält die $\varDelta$-Punkte von F' und G' und die schon ermittelten Punkte f_g und g_f, kann mithin konstruiert werden, und zwar — wie einfache Grenzbetrachtungen mit Hilfe des Satzes 11 (I) zeigen — auch dann, wenn von jenen 6 Punkten mehrere zusammenfallen.

Es seien a und b die Punkte, die der durch q gehende Kongruenzstrahl Q auf F bzw. G ausschneidet. Wenn es gelingt, auf $\varGamma$ die Bildbüschel a' und b' der Büschel

$[a, G]$ bzw. $[b, F]$ anzugeben, so ist das zu q gehörige $Q' = a\,b'$ bestimmt. Der Strahl $A = ga$ wird als Strahl des Büschels $[g, F]$ abgebildet in einen Strahl A' durch g_f, als Strahl des Büschels $[g, Q]$ in einen Strahl durch den Schnittpunkt c von G' mit dem sich selbst entsprechenden Strahl gq dieses Büschels. Ebenso können wir das Bild B' von $B = fb$ ermitteln: Es muß durch f_g und durch den Schnittpunkt d von F' mit fq gehen.

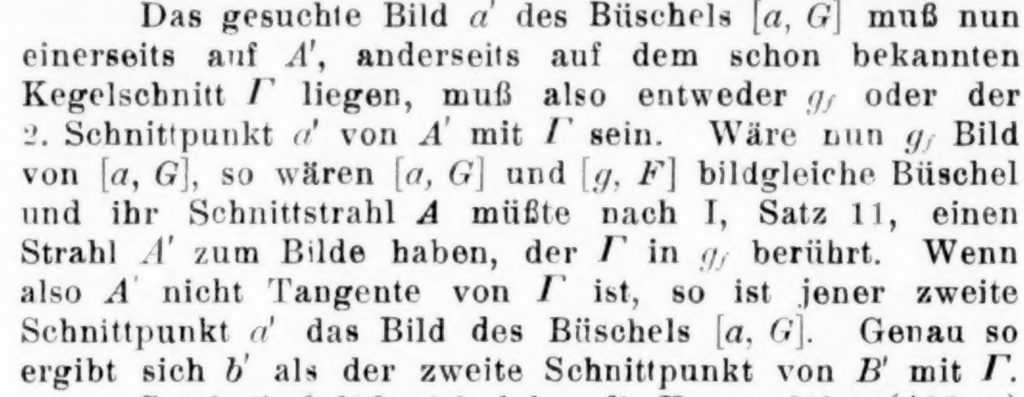


Abb. 3.

Das gesuchte Bild a' des Büschels $[a, G]$ muß nun einerseits auf A', anderseits auf dem schon bekannten Kegelschnitt Γ liegen, muß also entweder g_f oder der 2. Schnittpunkt a' von A' mit Γ sein. Wäre nun g_f Bild von $[a, G]$, so wären $[a, G]$ und $[g, F]$ bildgleiche Büschel und ihr Schnittstrahl A müßte nach I, Satz 11, einen Strahl A' zum Bilde haben, der Γ in g_f berührt. Wenn also A' nicht Tangente von Γ ist, so ist jener zweite Schnittpunkt a' das Bild des Büschels $[a, G]$. Genau so ergibt sich b' als der zweite Schnittpunkt von B' mit Γ.

Symbolisch läßt sich daher die Konstruktion (Abb. 3) des zu einem gegebenen q gehörenden Bildes Q' so zusammenfassen[1]):

$$\left.\begin{aligned} qfF'f_g\Gamma &= b'\,(\neq f_g) \\ qgG'g_f\Gamma &= a'\,(\neq g_f) \end{aligned}\right\}\, a'b' = Q'.$$

Wir erkennen damit: Für alle Punkte q auf einer durch f gehenden Geraden bleibt der Punkt b' derselbe, und ebenso liefern alle Punkte q auf einer durch g gehenden Geraden denselben Punkt a'. Fallen a' und b' zusammen, so ist die Tangente an Γ in diesem Punkt das gesuchte Q'. Die Konstruktion versagt auch nicht für die auf Δ gelegenen Punkte q, die bei der Konstruktion im Abschnitt 1 noch nicht erledigt wurden.

Ferner erkennt man jetzt auch wieder, daß zu einem gegebenen Q' i. a. zwei Spurelemente q_I und q_{II} gehören; man kann ja die beiden gleichberechtigten Γ-Punkte von Q' auf zwei Arten mit a', b' bezeichnen und dann jedesmal die aus der angegebenen Konstruktion folgende Umkehrung durchführen, also symbolisch etwa

$$Q'\Gamma = a' \text{ und } b'$$

$$\left.\begin{aligned} a'g_fG'g &= X \\ b'f_gF'f &= Y \end{aligned}\right\}\, XY = q_I.$$

Ist das gegebene Q' Tangente an Γ, so fallen q_I und q_{II} zusammen.

Es sei darauf hingewiesen, daß auch für die durch f_g oder g_f gehenden Strahlen Q' diese Konstruktion nicht versagt. Für den Fall $Q' = f_g$ erhält man außer den auf fg gelegenen unbestimmten Spurpunkten q_I noch einen weiteren Spurpunkt q_{II}. Es ist offenbar der Spurpunkt der von Q' verschiedenen Transversalen der 4 Strahlen F, G, S_1, S_2.

b) Die ausgeartete Kongruenz. 4. Wenn sich die Brennlinien F und G schneiden, so artet die Kongruenz aus in ein Bündel p und in ein Feld ε mit der Spurgeraden $E = fg$. Wählt man etwa f, F' und g beliebig und G' durch den Punkt $g_f = \mathfrak{F}'g$, so ist (nach 2, 1) $f_g = \mathfrak{G}'f = EF$ und das Doppelverhältnis $(e_1 e_2 fg) = (e_1 e_2 f_g g_f)$, wenn e_1 und e_2 die Δ Punkte von E sind. Wir behandeln nur den Fall, in dem p in bezug auf beide Abbildungen und ε in bezug auf die $\mathfrak{S}$-Abbildung vom Singularitätsgrad 0 ist. Damit p keinen π-Strahl besitzt, muß $f \neq g$ sein; und damit p und ε keinen $\mathfrak{T}$-Strahl enthalten, dürfen F' und G' keinen Δ-Punkt gemeinsam haben.

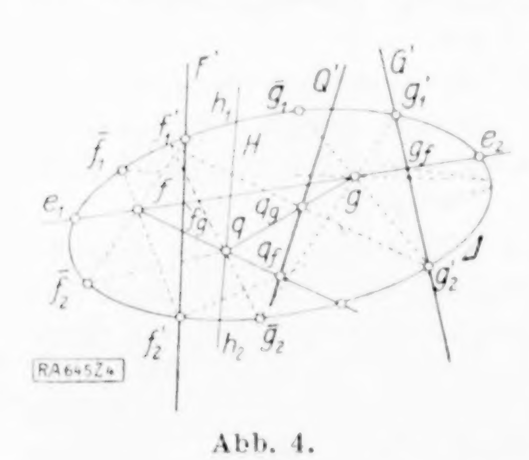


Abb. 4.

Geben wir q nicht auf Δ und nicht auf E (Abb. 4), so ist $Q' = q_f q_g$ der $\mathfrak{S}$-Riß des durch q gehenden Strahles des Bündels p. Ist r einer der Δ Punkte von fq, so geht der $\mathfrak{S}$-Riß des Bündelstrahles $pr = R$, der ein Strahl des Büschels FQ ist, durch $F'Q'$ und durch r. Auf diese Weise läßt sich also auch für die auf Δ liegenden Punkte r, für die $r_f = r_g = r$ wird, das zugehörige R' bestimmen.

[1]) Wir schreiben die nacheinander zu erfolgenden Operationen des Verbindens, Schneidens usw. durch Aneinandersetzen der dazu verwendeten Elemente ohne Operationszeichen, vereinbaren also, daß die Reihenfolge der Elemente zugleich die Reihenfolge jener Operationen sein soll.

Liegt endlich q auf E, so gehören zu q die Kongruenzstrahlen des Büschels $[q, F] = [q, G]$. Es fallen also q_f und q_g in einen Punkt q' auf E zusammen, und es sind dem Punkte q alle Strahlen Q' dieses Büschels q' zuzuordnen. In diesem Falle liefert q mit jedem dieser Strahlen Q' das Bildpaar eines dem Felde ε angehörenden und durch q gehenden Strahles. Soll von den durch q gehenden Kongruenzstrahlen nur der Bündelstrahl pq betrachtet werden, so muß Q' durch $F'G'$ gehen, ist also eindeutig festgelegt.

Geben wir umgekehrt einen $\mathfrak{S}$-Riß $Q' \neq E$, so gehört von den beiden Kongruenzstrahlen Q_I und Q_{II}, die Q' zum $\mathfrak{S}$-Riß haben, einer dem Bündel p, der andere dem Felde ε an. Daher muß von den zu Q' gehörenden Spurpunkten stets einer — etwa q_{II} — auf E liegen. Die Verwandtschaft $Q' \rightarrow q$ ist also zwar noch immer zweideutig, doch lassen sich die beiden Lösungen $q_{I,II}$ voneinander trennen; denn es kommt nur eine von ihnen in Frage, wenn man festsetzt, ob Q' der $\mathfrak{S}$-Riß eines Bündel- oder Feldstrahles sein soll.

5. Da die Bildfelder (q_I) und (Q') des Bündels p kollinear auf dieses Bündel bezogen sind, muß die Verwandtschaft $q_I \longleftrightarrow Q'$ eine Korrelation sein. Das läßt sich auch aus der angegebenen Konstruktion erkennen. Durchläuft nämlich q eine Punktreihe H (Abb. 4) mit den Δ Punkten h_1 und h_2, so durchlaufen q_f und q_g zwei zu dieser Punktreihe projektive, also auch aufeinander projektiv bezogene Punktreihen zweiter Ordnung (q_f) und (q_g). Diese beiden im allgemeinen nicht ineinander liegenden Punktreihen haben drei sich selbst entsprechende Punkte gemein, nämlich h_1, h_2 und denjenigen Punkt q' auf E, der dem Punkte $q = EH$ als q_f- und q_g-Punkt zugeordnet ist. Ist h' der vierte gemeinsame Punkt von (q_f) und (q_g), so schneidet das Strahlenbüschel h' auf (q_f) und (q_g) zwei projektive Punktreihen aus, die ebenfalls h_1, h_2 und q' zu sich selbst entsprechenden Punkten haben. Diese Projektivität muß daher mit der betrachteten Projektivität $q_f \longleftrightarrow q_g$ identisch sein, d. h. aber: die Verbindungsstrahlen Q' zusammengehöriger Punkte q_f und q_g bilden ein Büschel h', und die Verwandtschaft $q_I \longleftrightarrow Q'$ ist also in der Tat eine Korrelation.

Es ist begreiflich, daß diese Korrelation als Bild einer durch drei inhomogene Zahlen bestimmten Strahlenmannigfaltigkeit ebenfalls schon durch drei Zahlen festgelegt ist, nämlich durch Wahl eines beliebigen Bildpaares f, F' und eines noch einer Bedingung genügenden Bildpaares g, G'. Da jedoch im allgemeinen eine Korrelation in einem Gebilde zweiter Stufe erst durch Angabe von vier Bildpaaren bestimmt ist, so muß die Gesamtheit der Korrelationen, durch die die Bündel p des Raumes abgebildet werden, noch gewisse gemeinsame Eigenschaften haben, die unabhängig von der Wahl der Bildpaare f, F' und g, G' sind. In der Tat kennen wir, wie auch immer diese Bildpaare gewählt werden, stets die Gesamtheit derjenigen Punkte q_I, die mit den ihnen entsprechenden Strahlen Q' vereinigt liegen, nämlich die Punkte der Fundamentalkurve Δ. Es läßt sich zeigen, daß eine Korrelation eindeutig festgelegt werden kann durch Angabe dieser »Inzidenzkurve«[1]) des q_I-Feldes sowie durch Angabe zweier Bildpaare, die der benutzten Einschränkung genügen. Auf Grund dieser Erkenntnis läßt sich ferner leicht bestätigen, daß jede Korrelation der angegebenen Art als Bild eines und nur eines Bündels p aufzufassen ist.

Indem wir endlich die skizzierten Ueberlegungen auch für das Feld ε durchführen, erhalten wir die Sätze:

Satz 3. Ein Strahlenbündel wird abgebildet durch eine Korrelation $q \longleftrightarrow Q'$, bei der Δ die Inzidenzkurve des q Feldes ist. Sie ist eindeutig festgelegt durch Angabe der Bildpaare zweier Bündelstrahlen. Umgekehrt stellt jede Korrelation, die Δ zur Indizenzkurve des q-Feldes hat, das Bild eines Bündels dar.

Satz 4. Ein Strahlenfeld ε wird abgebildet durch eine ausgeartete Korrelation $q \longleftrightarrow Q'$, bei der den $\mathfrak{S}$-Rissen Q' die Punkte der Spurgeraden E zugeordnet sind, und zwar derart, daß die Δ-Punkte von E die Inzidenzpunkte der q-Gesamtheit sind. Umgekehrt stellt jede ausgeartete Korrelation mit dieser Eigenschaft das Bild eines Strahlenfeldes dar.

4. Die Abbildung der Regelscharen 2. Ordnung. 1. Es seien die Bildpaare dreier paarweise windschiefer Strahlen F, G und H gegeben. Wir suchen die Bildpaare der Strahlen Q, die diese drei Achsen schneiden. Offenbar können wir jetzt nicht mehr eines der zusammengehörigen Bilder q, Q' beliebig annehmen; denn die Spurpunkte q

[1]) Doehlemann, Geometr. Transform. II.

bilden eine Kurve zweiter Ordnung, die $\mathfrak{S}$-Risse Q' eine auf die Spurkurve projektiv bezogene Kurve zweiter Klasse.

Die Spurkurve (q) geht durch f, g und h. Sind f_g und f_h die $\mathfrak{S}$-Risse der Büschel $[f, G]$ bzw. $[f, H]$, so muß der durch f gehende Strahl unserer Regelschar die Gerade $f_g f_h$ zum $\mathfrak{S}$-Riß haben. Ebenso sind die $\mathfrak{S}$-Risse der durch g und h gehenden Strahlen der Regelschar (Q) die Geraden $g_f g_h$ bzw. $h_f h_g$. Damit sind zunächst drei Paar zusammengehörige Elemente von (q) und (Q') bestimmt.

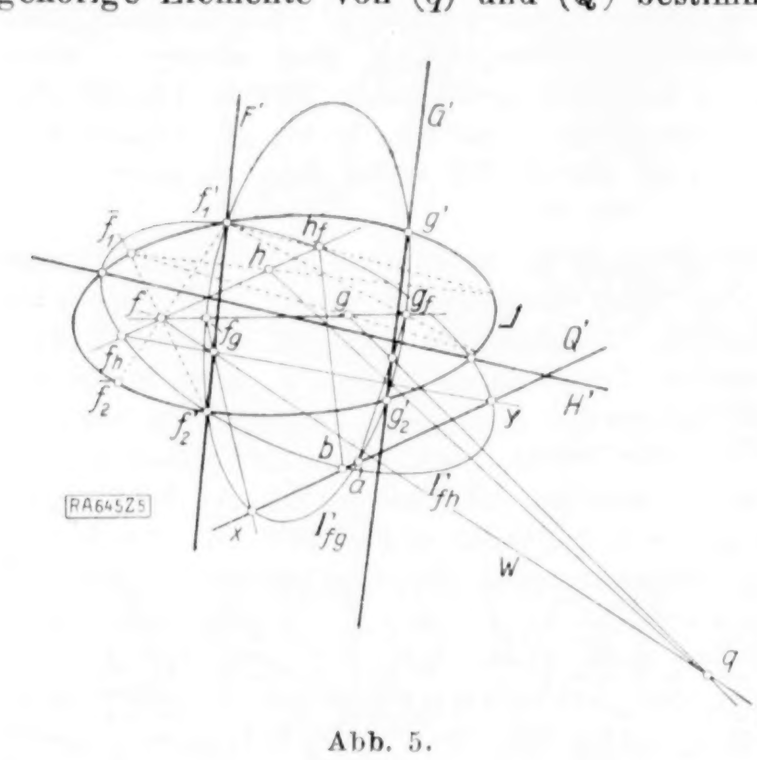


Abb. 5.

Um weitere Elemente zu ermitteln, konstruieren wir die Büschelkurven Γ_{fg} der Kongruenz $[F, G]$ und Γ_{fh} der Kongruenz $[F, H]$ nach der Methode von § 2, 3. Ist W (Abb. 5) eine beliebige π-Gerade durch f, so fassen wir ihre Punkte zunächst auf als Spurpunkte von Strahlen der Kongruenz $[F, G]$. Die $\mathfrak{S}$-Risse dieser Strahlen gehen nach § 3, 3 durch einen Punkt x auf Γ_{fg}, der durch die Konstruktion $W F'' f_g \Gamma_{fg} = x$ erhalten wird. Fassen wir jedoch die Punkte von W als Spurpunkte der Kongruenzstrahlen von $[F, H]$ auf, so gehen die zugehörigen $\mathfrak{S}$-Risse durch einen Punkt y auf Γ_{fh}, der sich aus der Konstruktion $W F' f_h \Gamma_{fh} = y$ ergibt. Wir suchen den Punkt q zu bestimmen, in dem W die noch unbekannte Kurve (q) zum zweiten Male schneidet. Der durch diesen Punkt q gehende Strahl Q unserer Regelschar hat den $\mathfrak{S}$-Riß $Q' = xy$. Den zugehörigen Punkt q können wir daher (nach der Konstruktion von § 3, 3) ermitteln. Ist nämlich a der von x verschiedene Schnittpunkt $Q' \Gamma_{fg}$, so ergibt sich q aus der Konstruktion

$$a g_f G' g W = q,$$

oder zur Kontrolle aus der Konstruktion

$$b h_f H' h W = q,$$

wobei b der von y verschiedene Punkt $Q' \Gamma_{fh}$ ist.

Auf diese Weise lassen sich beliebig viele zusammengehörende Bilder q und Q' bestimmen.

2. Wir nehmen den Fall an, daß sich G und H schneiden, daß aber F nicht dem von G und H bestimmten Bündel p oder Felde ε angehört. Dann zerfällt die Regelschar in zwei Strahlbüschel $[p, F]$ und $[F, \varepsilon]$. Die Aufgabe, die Bilder dieser beiden Büschel zu finden, kann dann auch so formuliert werden: Es soll der Komplex F geschnitten werden mit einem Bündel p und einem Felde ε. Die Aufgabe ist gelöst, wenn sich für jedes der beiden Büschel die Bildpaare zweier Strahlen angeben lassen.

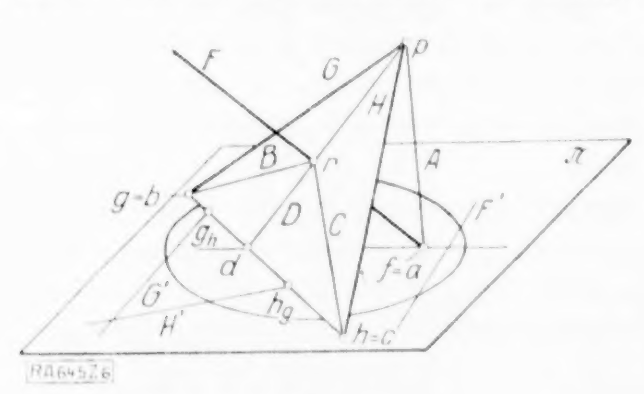


Abb. 6.

Wir konstruieren zunächst wieder aus den den Komplexen F, G, H zugeordneten quadratischen Verwandtschaften (Satz 1) die Punkte g_f, h_f, f_g, h_g, f_h, g_h. Es seien A, B, C die durch f, g, h gehenden Strahlen unserer Regelschar (Abb. 6). Dann wird wieder $A' = f_g f_h$, $B' = g_f g_h$, $C' = h_f h_g$. Das Bild des Büschels $[F, \varepsilon] = BC$ ist also durch die beiden Bildpaare $b = g$, B' und $c = h$, C' festgelegt.

Um auch das Bild des Büschels $[p, F]$ zu bestimmen, suchen wir das Bildpaar desjenigen Strahles D, der den Büscheln $[p, F]$ und $[F, \varepsilon]$ gemeinsam ist. Es ist $D' = (G' H')(B' C')$. Den Spurpunkt d erhalten wir, wenn wir den π-Strahl der Ebene p, F, der zugleich der π-Strahl des Büschels AF ist, mit $E = gh$ schneiden, also $F' A' f E = d$. Das Bild von $[p, F]$ ist mithin bestimmt durch die beiden Bildpaare $a = f$, A' und d, D'.

Das Büschel $[F, \varepsilon]$ bestimmt zugleich ein Bündel r; sein Bild ist eine wohlbestimmte Korrelation, die wir nach § 3,5 angeben können. Das Büschel $[p, F]$ bestimmt ein Feld ϱ, dessen Bild eine ebenfalls angebbare ausgeartete Korrelation ist. Wir haben also zugleich die Aufgaben gelöst: I. Das Bild desjenigen, dem Komplex F angehörenden Bündels r zu bestimmen, das mit einem Felde ε ein Büschel gemein hat, II. das Bild desjenigen, dem Komplex F angehörenden Feldes ϱ zu bestimmen, das mit einem Bündel p ein Büschel gemein hat.

Durch die Betrachtungen dieses Paragraphen sollte angedeutet werden, wie sich die üblichen Lagenaufgaben im Rahmen dieser Abbildung lösen lassen. Eine systematische Behandlung der Liniengeometrie müßte als nächsten Fall den Schnitt von vier Komplexen F, G, H und I untersuchen. Schneiden sich von diesen vier Strahlen etwa F und G einerseits, H und I anderseits, so könnte man diese Aufgabe auch wieder so formulieren: Den Schnittstrahl der beiden durch zwei Büschel FG und HI bestimmten Felder und den Schnittstrahl der durch sie bestimmten Bündel zu ermitteln. In der Tat lassen sich derartige rein projektive Aufgaben immer wieder unter Verwendung der hier benutzten Gedanken ausführen.

2. Kapitel: Die Verbindung allgemeiner Strahlenrisse.

5. Das Koinzidenzgebilde und die Fundamentalkorrelation. 1. Wir betrachten zwei Hauptabbildungen $\mathfrak{S}P = P'$ und $\mathfrak{U}P = P''$. Die Gesamtheit der Strahlen N, für die $N' = N''$ ist, heiße das Koinzidenzgebilde (N) der Abbildungen.

Jeder N-Strahl gehört einer bestimmten Schar des Regelscharen-Büschels

$$\lambda \cdot \mathfrak{S}(N) + \mu \cdot \mathfrak{U}(N) = 0$$

an. Ist umgekehrt N irgend ein Strahl der durch den Wert $\lambda : \mu$ charakterisierten Regelschar, so sind die Bildkoordinaten $N_\varkappa'$ zu den $N_\varkappa''$ proportional, und N ist also ein Strahl des Koinzidenzgebildes.

$\lambda \mathfrak{S} + \mu \mathfrak{U}$ ist die Leitmatrix der zu dem Werte $\lambda : \mu$ gehörenden Regelschar. Für $\lambda : \mu \neq -1$ wird die zugehörige Hauptleitmatrix

$$\mathfrak{M} = \frac{\lambda \mathfrak{S} + \mu \mathfrak{U}}{\lambda + \mu},$$

also die der betreffenden Regelschar zugeordnete Hauptmatrix

$$\mathfrak{N} = \frac{\lambda \mathfrak{T} + \mu \mathfrak{V}}{\lambda + \mu}.$$

Für $\lambda = 1$, $\mu = 0$ erhalten wir die singuläre Schar $\mathfrak{T}$, für $\lambda = 0$, $\mu = 1$ die singuläre Schar $\mathfrak{V}$. Es ist begreiflich, daß diese Scharen dem Koinzidenzgebilde zuzurechnen sind. Zwar hat etwa ein Strahl T sämtliche π-Strahlen zum $\mathfrak{S}$-Riß und i. a. nur einen einzigen T'' zum $\mathfrak{U}$-Riß, so daß sich nicht schlechthin von einem Zusammenfallen der Risse sprechen läßt. Dennoch kann eben jenes T'' als $\mathfrak{S}$-Riß und als $\mathfrak{U}$-Riß des Strahles T aufgefaßt werden.

Für $\lambda : \mu = -1$ besitzt die Leitmatrix $\lambda \mathfrak{S} + \mu \mathfrak{U} = \mathfrak{S} - \mathfrak{U}$ der zugehörigen Regelschar in der dritten, vierten und fünften Kolonne lauter Nullen, so daß die drei Komplexe jener Matrix drei π-Strahlen $K_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ darstellen, deren Linienkoordinaten in bezug auf das π-Dreieck

$$K_{\varkappa_1}' = \mathfrak{S}_{\varkappa_2} - \mathfrak{U}_{\varkappa_2}, \qquad K_{\varkappa_2}' = -(\mathfrak{S}_{\varkappa_1} - \mathfrak{U}_{\varkappa_1}), \qquad K_{\varkappa 3}' = -(\mathfrak{S}_{\varkappa_6} - \mathfrak{U}_{\varkappa_6})$$
$$(k = 1, 2, 3)$$

sind. Die Matrix dieser Koordinaten wird

$$\mathfrak{K} = \{K_{\varkappa\lambda}'\} = \mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0.$$

Besitzt sie den Rang $r = 3$, so bilden die drei Strahlen $K_\varkappa$ ein Dreieck, und die dem Werte $\lambda : \mu = -1$ entsprechende Regelschar unseres Büschels ist das Feld π. Ist $r = 2$, so schneiden sich die drei Strahlen in dem durch die Gleichungen $\mathfrak{K}(x) = 0$ bestimmten Punkte k_0. Die Regelschar besteht aus π und dem Bündel k_0. Für $r = 1$ fallen die drei Strahlen in einen Strahl K_0 zusammen, so daß der dem Werte $\lambda : \mu = -1$ entsprechende Bestandteil des Koinzidenzgebildes aus dem ausgearteten Komplex K_0 besteht. Die Gesamtheit aller π nicht angehörenden Koinzidenzstrahlen heiße das »eigentliche« Koinzidenzgebilde.

Das Koinzidenzgebilde der konjugierten Abbildung, die $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{V}$ zu projizierenden, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ zu singulären Scharen hat, besteht aus den Regelscharen (M), die zu den

Scharen (N) konjugiert sind. Es ist also die einer solchen Schar (M) zugeordnete Hauptmatrix von der Form $\mathfrak{M}$, die zugehörige Hauptleitmatrix von der Form $\mathfrak{N}$. Das Regelscharen-Büschel (M) heiße das »konjugierte« Koinzidenzgebilde (M).

Satz 5. Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ die Hauptmatrizen der projizierenden, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{V}$ die der singulären Scharen, so besteht das Koinzidenzgebilde (N) der durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ vermittelten Hauptabbildungen aus einem Büschel von Regelscharen, deren Leitmatrizen von der Form $\lambda\mathfrak{S} + \mu\mathfrak{U}$ sind. Das Koinzidenzgebilde der konjugierten Abbildungen besteht aus den zu den Scharen (N) konjugierten Scharen (M).

2. Sind $\mathfrak{M}^0$ und $\mathfrak{N}^0$ die den Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zugeordneten quadratischen Hauptmatrizen, so ist nach I, § 6, 4 der Spurkegelschnitt der entsprechenden Regelschar (M) oder (N) bestimmt durch die Matrix

$$\mathfrak{M}^0 - \mathfrak{N}_0 = \frac{\lambda(\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{T}^0) + \mu(\mathfrak{U}^0 - \mathfrak{V}^0)}{\lambda + \mu}.$$

Da $\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{T}^0$ und $\mathfrak{U}^0 - \mathfrak{V}^0$ die Matrizen der Fundamentalkurven $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ sind, so gehört jene Spurkurve dem durch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ bestimmten Büschel an. Das Spurgebiet (n) des eigentlichen Koinzidenzgebildes erfüllt also gewiß die ganze Ebene π, wenn $\varDelta_1 \neq \varDelta_2$ ist. Fallen $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ zusammen, so wird $\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{T}^0 = \varrho(\mathfrak{U}^0 - \mathfrak{V}^0)$, wo ϱ ein wohlbestimmter Faktor ist. Die Spurkurve einer dem Werte $\lambda : \mu \neq -1$ entsprechenden Regelschar hat dann die Matrix $\mathfrak{M}^0 - \mathfrak{N}^0 = \frac{\varrho\lambda + \mu}{\lambda + \mu}(\mathfrak{U}^0 - \mathfrak{V}^0)$, fällt also i. a. mit $\varDelta_1 = \varDelta_2$ zusammen. Nur für $\lambda : \mu = -1 : \varrho$ erhält man die Spurmatrix $\{0\}$, d. h. für $\varrho \neq 1$ die Matrix eines nicht in π liegenden Bündels a. Daher ist auch in diesem Fall jeder Punkt n in π als Spurpunkt mindestens eines eigentlichen Koinzidenzstrahles aufzufassen. Den Fall $\varrho = 1$ schließen wir vorläufig aus.

Zu zwei verschiedenen Regelscharen des Büschels, d. h. zu zwei verschiedenen Werten $\lambda : \mu$ und $\lambda' : \mu'$, gehören verschiedene Spurkurven. Ist nun n ein Punkt, der von den gemeinsamen Punkten von $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ verschieden ist und der — falls für $\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0$ der Fall $r = 2$ oder 1 vorliegt — auch verschieden ist vom Punkte k^0 oder den Punkten k von K^0, so bestimmt n zusammen mit den gemeinsamen Punkten von $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ die Spurkurve einer und nur einer Regelschar des Büschels, die durch eine Hauptmatrix darstellbar ist. Durch einen solchen Punkt n gibt es also stets einen und nur einen eigentlichen Koinzidenzstrahl, der einer durch Hauptmatrix darstellbaren Regelschar angehört. Ist aber n ein den Kurven $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ gemeinsamer Punkt, jedoch wieder $\neq k_0$ und $\neq k$, T der $\mathfrak{T}$-Strahl und V der $\mathfrak{V}$-Strahl durch n, so sind alle Strahlen des Büschels TV Koinzidenzstrahlen, da ihr $\mathfrak{S}$- und ihr $\mathfrak{U}$-Riß der π-Strahl dieses Büschels ist, und jeder dieser Strahlen gehört einer durch Hauptmatrix darstellbaren Regelschar des Büschels an.

3. Es soll jetzt der Zusammenhang zwischen dem Spurgebiet (n) und dem Bildgebiet $(N' = N'')$ des eigentlichen Koinzidenzgebildes ermittelt werden.

Ist n irgend ein vom Punkte k_0 oder den Punkten k von K_0 verschiedener π-Punkt, N ein durch diesen Punkt gehender eigentlicher Koinzidenzstrahl, $\mathfrak{N}^0$ die quadratische Hauptmatrix einer den Strahl N enthaltenden Regelschar und endlich $\mathfrak{M}^0 = -\mathfrak{N}^{0'}$, so ist nach I, Satz 16 der $\mathfrak{S}$-Riß und also zugleich der $\mathfrak{U}$ Riß von N $N' = \mathfrak{H}N$, wobei die Matrix

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}^0 - \mathfrak{M}_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0),$$

ist. Da der Faktor $\frac{\mu}{\lambda + \mu} \neq 0$ und endlich, so ist $\mathfrak{H}$ äquivalent $\mathfrak{K}$, also $N' = \mathfrak{K}N$; d. h. aber: Alle durch den Punkt n gehenden eigentlichen Koinzidenzstrahlen haben denselben $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}$-Riß, und dieser wird erhalten, indem man auf n die Korrelation mit der Matrix $\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0 = \mathfrak{K}$ anwendet.

Auf die durch k_0 oder einen Punkt k gehenden eigentlichen Koinzidenzstrahlen kann man den Satz 16 nicht anwenden. Da nun diese Punkte in bezug auf $\mathfrak{K}$ singulär sind (wenn $\mathfrak{K}$ vom Range 2 bzw. 1), so würden ihnen durch die jetzt ausgeartete Korrelation $\mathfrak{K}$ alle π-Strahlen zugeordnet werden. Das stimmt aber mit der Wahrheit überein, denn eines dieser Bündel $k = (R)$ wird durch $\mathfrak{S}$ und durch $\mathfrak{U}$ in dasselbe zu ihm kollineare, π ganz überdeckende Feld $(R' = R'')$ abgebildet, falls k in bezug auf beide Abbildungen vom Singularitätsgrad 0 ist. Wenn aber k singulare Strahlen enthält, so erkennt man ebenfalls leicht, daß jeder π-Strahl als $\mathfrak{S}$- und als $\mathfrak{U}$-Riß eines k Strahles aufzufassen ist.

Da die konjugierte Abbildung durch Vertauschen von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{V}$ entsteht, so wird der konjugierte Riß $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$ der durch n gehenden Strahlen des konjugierten eigentlichen Koinzidenzgebildes gewonnen, indem man auf n die Korrelation $\mathfrak{T}^0 - \mathfrak{V}^0 = -(\mathfrak{S}^{0\prime} - \mathfrak{U}^{0\prime}) = -(\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0)'$, d. h. aber die Korrelation mit der zu $\mathfrak{K}$ transponierten Matrix $\mathfrak{K}'$ anwendet. Diese Korrelation ist also auch bekannt, wenn $\mathfrak{K}$ irgendwie ermittelt ist. Dabei sei an folgende geometrische Deutung erinnert: Wenn ein Punkt und Geradenfeld (x, X) durch eine Korrelation mit der Matrix $\mathfrak{K}$ auf ein Geraden- und Punktfeld (X', x') bezogen wird derart, daß $X' = \mathfrak{K}x$, so ist zugleich $X = \mathfrak{K}'x'$. Ist also $\mathfrak{K}$ irgendwie festgelegt und will man die konjugierten Risse $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$ der durch einen beliebigen Punkt n gehenden Strahlen M ermitteln, so hat man n als Punkt des mit dem Felde (N') verknüpften Punktfeldes (n') zu betrachten und die ihm entsprechende Punktreihe im Felde (n) aufzusuchen.

Satz 6. Das Bildgebiet $(N' = N'')$ des eigentlichen Koinzidenzgebildes (N) wird aus dessen Spurgebiet durch die »Fundamentalkorrelation« mit der Matrix $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0$ gewonnen; das durch die konjugierte Abbildung erzeugte Bildgebiet $(\overline{M} = \overline{\overline{M}})$ des konjugierten eigentlichen Koinzidenzgebildes durch die Korrelation mit der transponierten Matrix $\mathfrak{K}'$.

4. Auch umgekehrt sind wir nun in der Lage, zu einem gegebenen Riß $N'' = N'$ den Spurpunkt n der zugehörenden Strahlen N anzugeben oder zu einem konjugierten Riß $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$ den Spurpunkt m der zugehörenden Strahlen M. Es gelten also die vier Beziehungen

$$\mathfrak{K}n = N' = N'' \qquad \mathfrak{K}'m = \overline{M} = \overline{\overline{M}}$$
$$\mathfrak{K}^{-1}N' = n \qquad \mathfrak{K}'^{-1}\overline{M} = m.$$

Insbesondere können wir, wenn Δ_1 und Δ_2 gegeben und die Fundamentalkorrelation bekannt ist, die Risse (T'') der Schar $\mathfrak{T}$ und (V') der Schar $\mathfrak{V}$ angeben; wir müssen dazu Δ_1 bzw. Δ_2 durch $\mathfrak{K}$ transformieren. Ebenso erhalten wir durch Transformation von Δ_1 bzw. Δ_2 mit $\mathfrak{K}'$ die Risse $(\overline{\overline{S}}')$ und $(\overline{U})$ von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{U}$. Da wir ferner beispielsweise aus einem Riß $\overline{\overline{S}}$, dem zugehörigen Spurpunkt s und Δ_2 mit Hilfe der Konfiguration des § 1, 3 (I) den Riß S'' ermitteln können, so sind auch die Bildkurven (S'') und (U') konstruierbar. Durch Δ_1, Δ_2 und $\mathfrak{K}$ sind also die $\mathfrak{S}$-Risse der Scharen (S), (U) und (V) und die $\mathfrak{U}$-Risse der Scharen (S), (U) und (T) festgelegt.

Wir bemerken endlich, daß der oben erwähnte Fall, in dem $\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{T}^0 = \mathfrak{U}^0 - \mathfrak{V}_0$ ist, noch eine Diskussion erfordert. Es läßt sich leicht zeigen, daß jetzt das Spurgebiet (n) nur aus der Fundamentalkurve $\Delta_1 = \Delta_2$ und einem Punkte k_0 besteht, daß die Fundamentalkorrelation einfach ausgeartet ist und daß der Satz 6 gültig bleibt. Diesem Resultat muß eine der analytischen Voraussetzung $\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{T}^0 = \mathfrak{U}^0 - \mathfrak{V}^0$ entsprechende geometrische Spezialisierung zugrunde liegen. Sie besteht — wie ebenfalls ohne Beweis angeführt sei — darin, daß die von gleichspurigen Strahlen S und U und von gleichspurigen Strahlen T und V erzeugten Ebenen durch denselben π-Punkt k^0 gehen.

5. In den nächsten Paragraphen soll gezeigt werden, daß die Lösung projektiver Aufgaben innerhalb des Bildgebietes möglich wird, wenn außer den Fundamentalkurven die Fundamentalkorrelation bekannt ist. Als Grundlage für jene Betrachtungen diene folgende Bemerkung. Ist n ein den Kurven Δ_1 und Δ_2 gemeinsamer Punkt, so liegt das diesem n zugeordnete $N' = N''$ mit n vereinigt. N' muß ja der π-Strahl des Büschels TV sein, wenn T und V die singulären Strahlen durch n sind. $\mathfrak{K}$ muß also so gewählt werden, daß die Inzidenzkurve des n-Feldes dem von Δ_1 und Δ_2 bestimmten Kegelschnittbüschel angehört. Durch einfache analytische Ueberlegungen, die wir hier der Kürze wegen unterdrücken, läßt sich erkennen, daß $\mathfrak{K}$ im übrigen beliebig angenommen werden darf und daß der folgende Satz gilt:

Satz 7. Sind in π zwei Kurven zweiter Ordnung[1]) Δ_1 und Δ_2 gegeben, sowie eine Korrelation $\mathfrak{K}$, deren Punktinzidenzkurve dem durch Δ_1 und Δ_2 bestimmten Büschel angehört, so lassen sich immer in vielfacher Weise zwei Regelscharen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ angeben, so daß die durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ vermittelten Hauptabbildungen Δ_1 und Δ_2 zu Fundamentalkurven und $\mathfrak{K}$ zur Fundamentalkorrelation haben.

---

[1]) Der Rang der Diskriminantenmatrix von Δ_1 und Δ_2 darf auch 0 sein.

6. Für zwei zueinander konjugierte Abbildungen, für die also $\mathfrak{S} = \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$, wird die Korrelationsmatrix $\mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0 = \mathfrak{S}^0 - \mathfrak{T}^0 = \mathfrak{S}^0 + \mathfrak{S}^{0'}$ symmetrisch und gleich der Matrix der Fundamentalkurve Δ. In diesem Fall ist also $\mathfrak{K}$ eine Polarität mit Δ als Inzidenzkurve.

Auch der Fall zweier Zentralprojektionen läßt sich wieder den Betrachtungen dieses Paragraphen einordnen. Die Fundamental-»Gebiete« Δ_1 und Δ_2 sind hier die Spurgebiete der beiden singulären und zugleich projizierenden Bündel m und n. Die Matrizen von Δ_1 bzw. Δ_2 sind $= \{0\}$, und daher ist auch die Matrix der Inzidenzkurve $\mathfrak{J} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}' = \{0\}$. Das Inzidenzgebiet muß mithin ebenfalls das ganze Punktfeld π sein und $\mathfrak{K}$ muß ausarten. Ist o der Spurpunkt des Strahles $U = mn$, so werden die durch einen Punkt x von π gehenden eigentlichen Koinzidenzstrahlen, also das Büschel $[x, U]$, durch beide Projektionen in den Strahl xo abgebildet. In der Tat artet daher $\mathfrak{K}$ aus, und jeder Punkt von π ist Inzidenzpunkt von $\mathfrak{K}$. Man hat zur Bestimmung von $\mathfrak{K}$ also nur das singuläre Zentrum o der Korrelation beliebig zu wählen. Beachtet man die Bemerkung zu Anfang des Abschnittes 5 dieses Paragraphen, so ist damit der innere Grund aufgedeckt, weshalb in diesem speziellen Fall lediglich die Annahme von o zur Lösung projektiver Aufgaben erforderlich ist.

6. Der Zusammenhang zwischen drei linearen Abbildungen des Strahlenraumes. 1. Im § 8 (1) wurde gezeigt, daß zwei Abbildungen nicht ausreichen, um Eineindeutigkeit zu erzielen, und daß es naheliegt, drei Abbildungen zu verwenden. Wir erkannten, daß bei beliebiger Wahl zweier Risse P' und P'' eines Raumstrahles der dritte Riß P''' aus einer durch die beiden ersten bestimmten Strahlenmannigfaltigkeit zu nehmen ist. Wenn die zu P' und P'' gehörenden projizierenden Strahlen zwei Transversalen besitzen, so besteht diese Mannigfaltigkeit nur aus zwei Strahlen P_I''' und P_{II}'''. Ist jedoch eine Regelschar von Transversalen vorhanden, so ist P''' aus den Strahlen einer gewissen Kurve 2. Klasse oder der Ausartung einer solchen zu wählen. Wenn wir diese Strahlenmannigfaltigkeit, die für den dritten Riß in Frage kommt, konstruktiv bestimmen wollen, so können wir das Problem auch so formulieren: Halten wir einen der drei Risse, etwa P' fest, so muß zwischen den beiden andern Rissen P'' und P''' eine i. a. in jeder Richtung mehrdeutige Verwandtschaft $\mathfrak{p}'$ bzw. $\mathfrak{p}'^{-1}$ bestehen, derart, daß zu einem beliebig gewählten P'' zwei oder ∞ viele Risse $P''' = \mathfrak{p}'P''$ gehören oder zu einem beliebig gewählten P''' wiederum zwei oder ∞ viele Risse $P'' = \mathfrak{p}'^{-1}P'''$. Es ist unsere Aufgabe, diese dem festgehaltenen Riß P' zugeordneten Verwandtschaften $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}'^{-1}$ zu bestimmen.

Für die folgenden Betrachtungen ist es zwar nicht nötig, für praktische Anwendungen aber doch nützlich, als dritten Riß den Spurpunkt p von P zu wählen, während die Hauptrisse P' und P'' durch zwei beliebige Regelscharen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ erzeugt sein sollen. Wir haben dann drei Aufgaben zu lösen:

Es wird gegeben und festgehalten der Riß	P'	P''	p
Wir suchen die i. a. mehrdeutigen Verwandtschaften:	$\mathfrak{p}'p = P''$; $\mathfrak{p}'^{-1}P'' = p$	$\mathfrak{p}''p = P'$; $\mathfrak{p}''^{-1}P' = p$	$\mathfrak{p}P' = P''$; $\mathfrak{p}^{-1}P'' = P'$

2. Wir beginnen mit der 3. Aufgabe. Es sei ein auf keiner der Fundamentalkurven liegender Punkt p in π gegeben. Das Bündel $p = (P)$ wird durch $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{U}$ in ein auf dieses Bündel kollinear bezogenes Feld (P') bzw. (P'') abgebildet. Zwischen diesen Feldern besteht also eine Kollineation $\mathfrak{p}P' = P''$. Es soll gezeigt werden, daß sie eine Perspektivität ist und konstruktiv festgelegt werden kann, wenn die Fundamentalkurven Δ_1 und Δ_2 und die Fundamentalkorrelation $\mathfrak{K}$ gegeben sind. Dabei sei der Einfachheit halber $\mathfrak{K}$ vom Range 3.

Durch die Korrelation $\mathfrak{K}$ ist es nämlich möglich, den zusammenfallenden $\mathfrak{S}$- und $\mathfrak{U}$-Riß des durch p gehenden $\mathfrak{N}$-Strahles N_p (bzw. der $\mathfrak{N}$-Strahlen) anzugeben: $N_p' = N_p'' = \mathfrak{K}p$. Ist P irgend ein Strahl durch p, E der π-Strahl des Büschels N_pP, so müssen P' und P'' dem Büschel $N_p'E$ angehören; die Risse P' und P'' schneiden sich also auf der bekannten Geraden N_p'. Und da ferner jeder π-Strahl durch p zusammenfallenden $\mathfrak{S}$- und $\mathfrak{U}$-Riß hat, so ist die Kollineation zwischen (P') und (P'') in der Tat eine Perspektivität mit dem Zentrum p und der Achse $N_p' = N_p''$.

Eine Perspektivität ist aber erst bestimmt, wenn außer Zentrum und Achse ein Bildpaar bekannt ist, und es fragt sich, ob sich ein solches ermitteln läßt. Da durch $\mathfrak{K}$ auch $\mathfrak{K}'$ bekannt ist, läßt sich nach II, § 5,4 der $\mathfrak{T}$- und $\mathfrak{B}$-Riß des durch p gehenden $\mathfrak{M}$-Strahles M_p aufsuchen: $\overline{M}_p = \overline{\overline{M}}_p = \mathfrak{K}'p$. Aus $\varDelta_1$, p und $\overline{M}_p$ ergibt sich der $\mathfrak{S}$-Riß M_p' von M_p, aus $\varDelta_2$, p und $\overline{\overline{M}}_p$ der $\mathfrak{U}$-Riß M_p''. Damit ist ein Bildpaar M_p', M_p'' der Perspektivität $\mathfrak{p}$ gefunden.

3. Für den Fall, daß p auf einer der Fundamentalkurven liegt, etwa auf $\varDelta_1$, artet die Perspektivität aus. Da der durch p gehende $\mathfrak{N}$-Strahl jetzt zugleich der $\mathfrak{T}$-Strahl T durch p ist, so ist sein $\mathfrak{U}$-Riß T'' die Achse der Perspektivität. Jeder durch p gehende π-Strahl P ist aufzufassen als $\mathfrak{S}$-Riß aller Strahlen des Büschels $TP' = a$, und ihm sind also im Felde (P'') alle Strahlen des Büschels $T''P' = a''$ zugeordnet. Jedes nicht durch p gehende T' ist nur als $\mathfrak{S}$-Riß von T aufzufassen, und es ist einem solchen T' mithin die Achse T'' im Felde (P'') zugeordnet. Dieser Fall ist deshalb wieder bemerkenswert, weil durch ein Bildpaar p, P', dessen p mit P' vereinigt und auf $\varDelta_1$ liegt, der Raumstrahl P und eben darum auch P'' noch nicht eindeutig festgelegt ist. Ist jedoch noch der $\mathfrak{T}$-Riß $\overline{P}$ bekannt, so ist P eindeutig bestimmt als Schnitt der Büschel $TP' = a$ und $S\overline{P} = \mathfrak{b}$, wenn S der $\mathfrak{S}$-Strahl durch p ist. Es muß also jetzt auch P'' eindeutig zu ermitteln sein. Wir verschaffen uns dazu den $\mathfrak{U}$-Riß des Büschels b, also $b'' = S''\overline{P}$. Das ist möglich, weil S'' nach § 5,4 als bekannt anzusehen ist. Dann ist der gemeinsame Strahl von a'' und b'' der gesuchte Riß $P'' = (P'T'')(\overline{P}S'')$.

Aehnliche Ueberlegungen gelten, wenn p auf beiden Fundamentalkurven liegt. Ist also durch p, P', eventuell unter Hinzufügen von $\overline{P}$, der Raumstrahl P eindeutig gegeben, so läßt sich stets der zugehörige Riß $P'' = \mathfrak{p}P'$ ermitteln.

4. Es sind nun die beiden ersten in der Tabelle angegebenen Aufgaben zu lösen. Wir halten etwa P' fest und suchen die Verwandtschaften $\mathfrak{p}'p = P''$ und $\mathfrak{p}'^{-1}P'' = p$ zu bestimmen. Die Verwandtschaft $\mathfrak{p}'$ ist nach Abschnitt 2 eindeutig für die nicht auf $\varDelta_1$ liegenden p; dagegen wird $\mathfrak{p}'^{-1}$ mehrdeutig sein.

Bezeichnen wir die durch die $\varDelta_1$-Punkte von P' gehenden $\mathfrak{S}$-Strahlen mit F und G, so sind ihre $\mathfrak{U}$-Risse F'' und G'' als bekannt anzusehen (§ 5, 4). Geben wir nun einen von $f = p_1'$ und $g = p_2'$ verschiedenen Spurpunkt p, so haben wir die Aufgabe, den Riß P'' desjenigen durch p gehenden Strahles P zu bestimmen, der der Kongruenz $[F, G]$ angehört, also einer Kongruenz, deren Brennlinien durch die Rißpaare f, F'' und g, G'' gegeben sind. Das ist aber genau die in § 3, 1 bereits gelöste Aufgabe. Und geben wir umgekehrt einen beliebigen Riß P'', so haben wir die Aufgabe: die Spurpunkte derjenigen Strahlen zu ermitteln, die der durch f, F'' und g, G'' gegebenen Kongruenz angehören und P'' zum $\mathfrak{U}$-Riß haben. Auch diese Aufgabe wurde im § 3, 2 gelöst. Wir haben in unserem Fall zu bestimmen:

1. den Kegelschnitt $(p)_f$ durch die 5 Punkte f, $\overline{f}_1$, $\overline{\overline{f}}_2$, p_1'', p_2'',
2. » » $(p)_g$ » » 5 » g, $\overline{g}_1$, $\overline{\overline{g}}_2$, p_1'', p_2''.

Die von p_1'' und p_2'' verschiedenen Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte sind die gesuchten Spurpunkte p_I und p_{II}. Dabei ist zu beachten, daß im speziellen Fall — wenn $(p)_f$ und $(p)_g$ zusammenfallen — sich eine ganze Kurve solcher Spurpunkte p ergibt. Zugleich erkennt man, daß es für Konstruktionszwecke genügt, die Risse $\overline{\overline{F}}$, $\overline{\overline{G}}$, also nicht auch F'' und G'' aufzusuchen.

Die gesuchte Verwandtschaft $\mathfrak{p}'$ ist also jene einzweideutige quadratische Punkt-Strahlen-Verwandtschaft, die wir im § 3 kennen gelernt haben (Satz 2) und die bestimmt ist durch die Rißpaare f, F'' und g, G''. Die gleichen Ueberlegungen gelten, wenn wir P'' festhalten. Nur haben wir in diesem Fall unter F und G die zu P'' gehörenden $\mathfrak{U}$-Strahlen zu verstehen.

5. Wir sind also in der Lage, zu einem gegebenen Bildpaar P', p den Riß P'' nicht nur aus der dem Bilde p zugeordneten Perspektivität $\mathfrak{p}P' = P''$ zu bestimmen, sondern auch aus der dem Bilde P' zugeordneten quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{p}'p = P''$. Wir sind ferner in der Lage, und diese Aufgabe ist die wichtigere, die einem Bildpaar P', P'' zugeordneten Spurpunkte der in Frage kommenden Raumstrahlen anzugeben, entweder durch die dem P' adjungierte quadratische Verwandtschaft

$$\mathfrak{p}'^{-1}P'' = p_I, p_{II}, \ldots$$

oder aber aus der dem P'' adjungierten quadratischen Verwandtschaft

$$\mathfrak{p}''^{-1} P' = p_I, p_{II}, \ldots.$$

Damit ist ein allgemeines Mittel gefunden, um eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Strahlenraumes herzustellen. Haben wir bei irgend einer Aufgabe mit einem beliebig zu wählenden Raumstrahl P zu arbeiten, dessen Risse P' und P'' wir also willkürlich annehmen dürfen, so haben wir zunächst darüber zu entscheiden, welcher der dem Paare P', P'' entsprechenden Raumstrahlen gemeint sein soll. Das geschieht, indem wir die möglichen Spurpunkte (p) bestimmen, unter ihnen irgend einen auswählen und dem Bildpaar P', P'' zur genaueren Bestimmung zuordnen. — Der folgende Satz bringt die Zusammenfassung der Ergebnisse.

Satz 8. Sind von zwei Hauptabbildungen des G-Raumes auf eine Bildebene π die Fundamentalkurven Δ_1 und Δ_2 sowie die Fundamentalkorrelation $\mathfrak{K}$ gegeben, und betrachtet man als 3. Abbildung den durch π erzeugten Spurenriß, so ist es stets möglich, zu irgend zwei Bildern die in Frage kommenden dritten Bilder zu konstruieren. Greift man aus der Mannigfaltigkeit dieser dritten Bilder eines heraus und ordnet es den beiden ersten zu, so ist — von wenigen Ausnahmefällen abgesehen — durch den Inbegriff dieser drei Bilder ein Raumstrahl eindeutig festgelegt, wenn man irgend zwei Regelscharen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ mit den Fundamentalkurven Δ_1 und Δ_2 sowie der Fundamentalkorrelation $\mathfrak{K}$ wählt.

Ein Ausnahmefall tritt bei zwei Zentralprojektionen beispielsweise ein, wenn $P' = P''$ durch den Spurpunkt o des Strahles mn gewählt wird. Dann genügt die Angabe eines Spurpunktes p auf P' noch nicht, um P zu bestimmen, und man muß etwa noch die Bilder irgend eines P schneidenden Strahles geben (vergl. § 7). Solche Ausnahmefälle können nach § 1, 1 höchstens dann eintreten, wenn ein zu zwei Rissen P', P'' gehörender Spurpunkt p auf beiden Fundamentalkurven und zugleich mit beiden Rissen vereinigt liegt[1]).

6. Es sei hier noch einmal auf den Fall hingewiesen, daß die beiden abbildenden Regelscharen zueinander konjugiert sind, daß also $\mathfrak{S} = \mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}$ und daher $P' = \overline{P}$, $P'' = \overline{\overline{P}}$ (Abb. 7). Sind F und G wieder die zu P' gehörenden $\mathfrak{S}$-Strahlen, so ist $\overline{F} = F'$, d. h. die Tangente in f an Δ, also $\overline{\overline{f_1}} = \overline{\overline{f_2}} = f$. Wie erhält man jetzt — falls P'' gegeben ist — den Kegelschnitt $(p)_f$ durch die Punkte $f, f_1, f_2, p_1'', p_2''$? Es ist der Spurkegelschnitt der durch F und die $\mathfrak{T}$-Strahlen durch p_1'' und p_2'' bestimmten Regelschar. Da F diese beiden $\mathfrak{T}$-Strahlen schneidet, so artet diese Schar aus in zwei Strahlbüschel mit den Spurlinien $fp_1'' = p_1'p_1''$ und $fp_2'' = p_1'p_2''$. Ebenso erhält man für den Kegelschnitt $(p)_g$ das Geradenpaar $p_2'p_1''$ und $p_2'p_2''$, mithin für p_I und p_{II} die von p_1'' und p_2'' verschiedenen Schnittpunkte dieser ausgearteten Kegelschnitte, übereinstimmend mit § 1,3 (II).

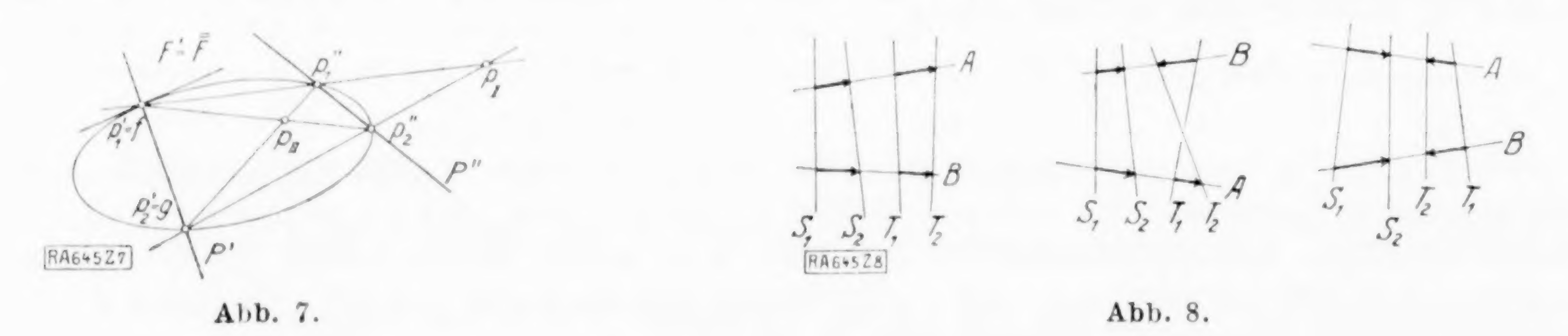


Abb. 7. Abb. 8.

Es läßt sich übrigens in diesem Fall auch durch Einführung orientierter Strahlen Ein-Eindeutigkeit erzielen. Wird von den Brennlinien einer Kongruenz die eine als erste, die andere als zweite bezeichnet, so soll die Kongruenz »orientiert« heißen. Das Punktepaar, das die Brennlinien auf irgend einem Strahle der Kongruenz ausschneiden, ist dann ebenfalls orientiert, und damit ist auch dem betreffenden Strahl ein bestimmter »Richtungssinn« zugeordnet. Liegen nun zwei orientierte Kongruenzen $[S_1, S_2]$ und $[T_1, T_2]$ vor, die etwa zwei gemeinsame Strahlen A und B besitzen, so erzeugt jede der Kongruenzen auf jedem dieser beiden Strahlen die ihr eigene Orientierung. Es sind dann offenbar, je nach der gegenseitigen Lage der Brennlinien, drei Fälle möglich. Es kann auf beiden Strahlen A und B die S-Orientierung mit der T-Orientierung zusammenfallen;

[1]) Und zwar nur dann, wenn $P' = P'' = \mathfrak{K}p$.

oder es ist das nur auf einem der Strahlen der Fall, während auf dem anderen die Orientierungen entgegengesetzt sind; endlich kann das letzte auch auf beiden Strahlen geschehen. Zwei orientierte Kongruenzen können also zwei orientierte Strahlen oder einen oder endlich keinen orientierten Strahl gemeinsam haben (Abb. 8).

Ist nun in unserem Fall ein Bildpaar P', P'' gegeben, so können wir die zugehörigen projizierenden Kongruenzen $[S_1, S_2]$ und $[T_1, T_2]$ dadurch orientieren, daß wir die $\varDelta$-Punkte von P' bzw. P'' willkürlich mit p_1', p_2' bzw. p_1'', p_2'' bezeichnen (Abb. 9). So werden zunächst die Bilder P' und P'' orientiert. Die Kongruenzen schneiden sich in dem Verbindungsstrahl P_I der Punkte $S_1 T_1$ nnd $S_2 T_2$ und dem Verbindungsstrahl P_{II} der Punkte $S_1 T_2$ und $S_2 T_1$. Auf dem Strahl P_I ist also die S-Orientierung gleich der T-Orientierung, während dem Strahl P_{II} entgegengesetzte Orientierungen zugeordnet sind. Es ist mithin den beiden Kongruenzen stets ein und nur ein orientierter Strahl gemeinsam, und diesen wollen wir als das Original der orientierten Bilder P', P'' ansehen.

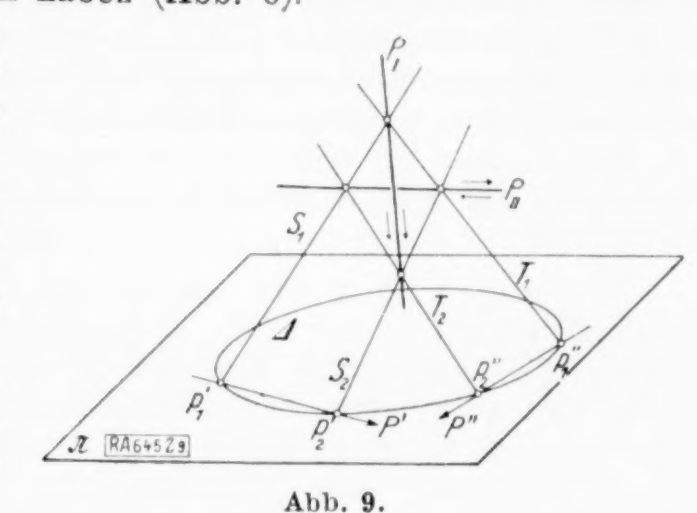


Abb. 9.

Man könnte sich fragen, ob es Abbildungen gibt, bei denen die Scharen 𝔖 und 𝔘 nicht einander konjugiert sind und bei denen doch jede 𝔖-Kongruenz sich mit jeder 𝔘-Kongruenz in einem und nur einem orientierten Strahl schneidet. Man überzeugt sich leicht, daß das für beliebige Systeme keineswegs der Fall ist. Doch soll in der vorliegenden Arbeit auf diese Frage nicht näher eingegangen werden.

7. Die Schnittbedingung für zwei Raumstrahlen. 1. Es seien zwei Fundamentalkurven $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ und die Fundamentalkorrelation $\mathfrak{K}$ gegeben. Ein Bildpaar P', P'' charakterisiert zusammen mit einem der zugehörigen Spurpunkte p einen bestimmten Strahl P. Ist ferner der 𝔖-Riß Q' eines P schneidenden Strahles Q gegeben und sind S_1 und S_2 die zugehörigen 𝔖-Strahlen, so kommen für Q in Frage die Strahlen der Regelschar $[S_1, S_2, P]$, für Q'' mithin die Strahlen, die den 𝔘-Riß dieser Regelscharen bilden. Es ist die Aufgabe zu lösen, diese Kurve 2. Klasse (Q'') anzugeben.

Im § 2 (II) wurde die Spurkurve (q) der genannten Regelschar ermittelt. Sie ist bestimmt durch die Punkte

$$z_1 = \bar{p}_1, \quad z_2 = \bar{p}_2, \quad z_3 = p, \quad z_4 = q_1', \quad z_5 = q_2'.$$

Jeder von q_1' und q_2' verschiedene Punkt q dieser Kurve bestimmt mit Q' zusammen eindeutig einen Strahl Q des Komplexes P, und sein Q'' wird mithin als 𝔘-Riß des durch q gehenden, der Kongruenz $[S_1, S_2]$ angehörenden Strahles mit Hilfe der dem Q' zugeordneten quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{q}'$ ermittelt: $\mathfrak{q}' q = Q''$. Insbesondere können wir die 5 bekannten Punkte $z_\varkappa$ mit Q' koppeln und jedesmal den entsprechenden 𝔘-Riß $Z_\varkappa'' = \mathfrak{q}' z_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots 5)$ bestimmen. Die durch die 5 Strahlen $Z_\varkappa''$ festgelegte Kurve 2. Klasse bildet also die gesuchte »Ordnungskurve« (Q''). Sie ist nach I, Satz 12, projektiv auf die Spurpunktskurve (q) bezogen.

Wir betrachten ihre fünf Bestimmungsstrahlen genauer. Das Bildpaar $\bar{z}_1$, Q' stellt den durch $z_1 = \bar{p}_1$ gehenden 𝔗-Strahl $T_{\bar{p}_1}$, das Bildpaar z_2, Q' den durch $z_2 = \bar{p}_2$ gehenden 𝔗-Strahl $T_{\bar{p}_2}$ dar. Mithin sind die entsprechenden 𝔘-Risse $T_{\bar{p}_1}''$ und $T_{\bar{p}_2}''$ bei festgehaltenem P unabhängig von Q' und sofort anzugeben, wenn man sich von vornherein alle Risse der Scharen 𝔖, 𝔗, 𝔘, 𝔙 nach § 5,3 konstruiert denkt. Den 𝔘-Riß Z_3'' des durch $z_3 = p$ gehenden Strahles der Kongruenz $[S_1, S_2]$ kann man auch mit Hilfe der dem p zugeordneten Perspektivität $\mathfrak{p}$ bestimmen: $Z_3'' = \mathfrak{q}' z_3 = \mathfrak{p} Q'$.

Das empfiehlt sich dann, wenn von mehreren P schneidenden Strahlen $Q, R, \ldots$ die 𝔖-Risse $Q', R' \ldots$ gegeben sind und ihre 𝔘-Risse gewählt werden sollen. Was endlich Z_4'' und Z_5'' betrifft, so ist zu bedenken, daß durch $z_4 = q_1'$ und Q' der Riß Z_4'' noch nicht eindeutig bestimmt ist. Diesem Bildpaar sind nach § 6,3 vielmehr die Strahlen eines Büschels als 𝔘-Riß zugeordnet, nämlich des Büschels $Q' T_1''$, falls T_1 der 𝔗-Strahl durch q_1' ist; die Transformation $\mathfrak{q}' z_4$ liefert also sämtliche Strahlen dieses Büschels. Der durch q_1' gehende, in Frage kommende Strahl Z_4 ist aber dadurch festgelegt, daß er P schneiden muß. So läßt sich wiederum der Riß Z_4 (§ 2,3) und nunmehr eindeutig Z_4''

ermitteln (§ 6,3). Ebenso wird Z_5'' aus dem Büschel $Q'T_2''$ ausgewählt, wenn T_2 den durch q_2' gehenden $\mathfrak{T}$-Strahl bedeutet.

Diese Bemerkungen zeigen, daß die Transformation des Kegelschnitts (q) mittels $\mathfrak{q}'$ außer der Kurve (Q'') noch jene Strahlbüschel $Q'T_1''$ und $Q'T_2''$, d. h. eine zerfallende Kurve 4. Klasse liefert. (Q'') besteht also nur aus einem Teil der Bildgesamtheit $\mathfrak{q}'(q)$, und es ist nur dann angängig, (Q'') schlechthin als die durch $\mathfrak{q}'$ transformierte Kurve (q) zu bezeichnen, wenn die Einschränkung für die Punkte q_1' und q_2' beachtet wird. Nach II, Satz 1, war $(q) = \mathfrak{P}'^{-1}Q'$, so daß die dem Q' in bezug auf P zugeordnete Ordnungskurve für die $\mathfrak{U}$-Risse mit dem gemachten Vorbehalt symbolisch geschrieben werden kann

$$(Q'') = \mathfrak{q}'(\mathfrak{P}'^{-1}Q').$$

Dadurch, daß wir nun in der Lage sind, die Schnittbedingung für zwei Raumstrahlen P und Q im Bilde anzugeben, ist auch die Lösung der projektiven Aufgaben erledigt und kann nach dem Muster des vorigen Kapitels durchgeführt werden. Freilich kann man einwenden, daß die Verwendung der Spurenrisse ein Umweg ist und daß, falls man ihn wählt, einer der durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ erzeugten Risse überflüssig erscheint. Doch ist zu bedenken, daß die darstellende Geometrie sich in den seltensten Fällen mit zwei Abbildungen begnügt, daß etwa bei dem üblichen Zweitafelsystem vier Risse verwendet werden. Es ist ferner ein psychologisches Moment nicht zu vergessen, daß nämlich in vielen Fällen die Abbildung einer Strahlenmannigfaltigkeit durch Punkte etwas Unbefriedigendes, Unanschauliches hat und daß der Spurenabbildung daher tatsächlich nur die Rolle einer »Hilfsabbildung« zukommt. Das Ergebnis lautet also kurz:

Satz 9. Die Lösung der projektiven Aufgaben bei Verwendung zweier Hauptabbildungen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ ist möglich, wenn außer den Fundamentalkurven Δ_1 und Δ_2 noch die Fundamentalkorrelation $\mathfrak{K}$ gegeben ist.

2. Auf die Abbildung der linearen Strahlengebilde und die mit ihr verknüpfte Lösung der projektiven Aufgaben soll hier nicht weiter eingegangen werden, da sie auf den in diesem Paragraphen entwickelten Grundgedanken beruht. Für die Bündel und Felder, die ja kollinear auf jedes ihrer Bildfelder bezogen sind, gilt der

Satz 10. Ein Bündel (P) oder ein Feld (Q) wird durch eine Kollineation $(P' \longleftrightarrow P'')$ bzw. $(Q' \longleftrightarrow Q'')$ abgebildet.

Die Konstruktion dieser Kollineationen, die wiederum nicht willkürlich gewählt werden dürfen, kann unter Verwendung der Betrachtungen des § 3; 4,5 und der im § 6 eingeführten Verwandtschaften geschehen und soll hier nicht durchgeführt werden. Dagegen läßt sich für den Fall des Feldes die Kollineation $(Q' \longleftrightarrow Q'')$ noch auf eine andere Weise ermitteln, und zwar unter Benutzung einer neuen Deutung unserer allgemeinen Abbildung.

Zwischen dem Felde $\varepsilon = (Q)$ und seinem $\mathfrak{S}$-Bildfelde (Q') besteht eine Kollineation, die nicht ausgeartet ist, wenn wir ε in bezug auf $\mathfrak{S}$ vom Singularitätsgrad 0 annehmen. Durch diese werden nicht nur die Strahlen, sondern auch die Punkte von ε auf die von π bezogen, da ja jedem ε-Büschel ein π-Büschel, d. h. ein bestimmter π-Punkt zugeordnet ist. Die Felder haben die Eigenschaft, daß der ihnen gemeinsame Strahl E sich selbst entspricht, ohne daß i. a. die Punkte von E sich selbst entsprechen. Verbindet man die entsprechenden Punkte der beiden Felder durch Strahlen, so entsteht nach bekannten Sätzen der projektiven Geometrie[1]) eine lineare Strahlenkongruenz, deren Brennlinien F und G durch die Doppelpunkte der auf E erzeugten Punktprojektivität, d. h. durch die Δ_1-Punkte e_1 bzw. e_2 von E gehen. Wir behaupten genauer, daß jene Brennlinien die $\mathfrak{T}$-Strahlen durch e_1 und e_2 sind. Denn sind (Abb. 10) a und a' zwei sich entsprechende Büschel in ε bzw. π, so gehört zu dem Strahl $ae_1 = A_1$ der $\mathfrak{S}$-Riß $a'e_1 = A_1'$. Da aber durch e_1 ein singulärer Strahl $\mathfrak{T}_1$ geht, so ist nach I, Satz 8, A_1' der π-Strahl des Büschels $T_1 A_1$, und es muß also der den Bündeln a und a' gemeinsame Strahl A den Strahl T_1 schneiden und aus analogen Gründen auch T_2. Somit

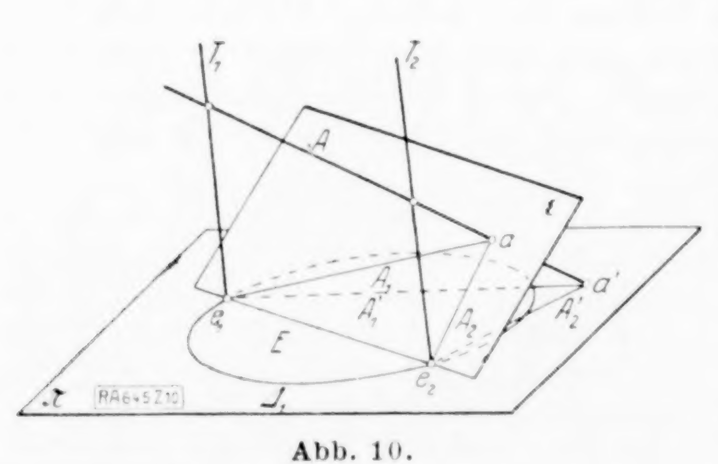


Abb. 10.

[1]) Vergl. etwa Müller-Kruppa, Die lin. Abb. § 28.

ist gezeigt, daß alle Strahlen A jenes Netzes wirklich die durch die Δ_1-Punkte von E gehenden $\mathfrak{T}$-Strahlen treffen.

Das Feld ε kann also in folgender Weise durch eine »Netzprojektion« — die Bezeichnung stammt von E. Müller — abgebildet werden: Man bestimme dasjenige Strahlennetz (A), das die durch die Δ_1-Punkte von E gehenden $\mathfrak{T}$ Strahlen zu Brennlinien hat, und projiziere nun die Büschelpunkte einer in ε liegenden Geraden P mit Hilfe der Netzstrahlen auf π. Dadurch entsteht in π eine Büschelreihe mit dem gemeinsamen Strahl P', dem $\mathfrak{S}$-Riß von P. Das projizierende Netz bleibt dasselbe, wenn man ε um E dreht.

Der II Riß (Q'') von ε kann durch Projektion mit Hilfe eines Netzes (B) erzeugt werden, dessen Brennlinien die durch die Δ_2 Punkte e_3 und e_4 von E gehenden $\mathfrak{V}$ Strahlen V_3 und V_4 sind.

ε sei nun im Bilde durch Angabe der Risse F', F'', f und G', G'', g zweier seiner Strahlen gegeben. Von der gesuchten Kollineation, die zwischen den Bildfeldern (Q') und (Q'') besteht, kennen wir außer den Bildpaaren F', F'' und G', G'' noch den sich selbst entsprechenden Strahl $E = E' = E''$. Die Kollineation wäre bestimmt, wenn wir noch ein viertes Elementepaar, entweder ein Strahlen- oder ein Punktepaar angeben könnten. Die Kongruenzen $[T_1, T_2]$ und $[V_3, V_4]$ haben nun außer E i. a. mindestens einen weiteren Strahl Y gemeinsam. Ist $r = Y\varepsilon$, so wird das Büschel $[r, \varepsilon]$ durch beide Netze in das Büschel $r' = r'' = y$ projiziert, wobei $y = Y\pi$ ist. y ist also ein Fixpunkt der gesuchten Kollineation und kann, wie wir behaupten, aus den Fundamentalgebilden konstruiert werden. Der Strahl Y nämlich ist ein dem konjugierten eigentlichen Koinzidenzgebilde angehörender Strahl, der E zum $\mathfrak{T}$-Riß und zum $\mathfrak{V}$ Riß hat. Er wird ja durch die Kongruenz $[T_1, T_2]$ bzw. $[V_3 V_4]$ in $\overline{Y} = \overline{Y} = E$ projiziert. Den zu einem solchen Bilde gehörenden Spurpunkt y können wir aber in bekannter Weise durch die zu $\mathfrak{K}'$ inverse Korrelation $\mathfrak{K}'^{-1}$ ermitteln:

$$\mathfrak{K}'^{-1}E = y.$$

Dieser mithin in der Tat bekannte Punkt y ist der i. a. nicht auf E gelegene Fixpunkt der gesuchten Kollineation und bestimmt das noch fehlende vierte Bildpaar. Er bleibt derselbe, wenn wir ε um E drehen und nimmt — wie man sich durch Grenzbetrachtung überzeugt — die Rolle eines Fixpunktes auch dann ein, wenn ε einen der vier singulären Strahlen enthält, die Kollineation also ausartet.

Satz 11. Die Kollineationen $(Q' \longleftrightarrow Q'')$, durch die die Felder mit dem gemeinsamen Spurstrahl E abgebildet werden, haben denselben Fixstrahl E und denselben Fixpunkt $y = \mathfrak{K}^{-1\prime}E$.

Daß sich ein duales, ebenso einfaches Ergebnis nicht für die Bilder des Bündels ergibt, liegt offenbar daran, daß wir den Strahlenraum auf die Strahlen eines Feldes abbilden und mithin auch das Feld überhaupt auszeichnen. Würden wir ihn auf die Strahlen eines Bündels abbilden, so würden auch die Bündel durch ein zur Netzprojektion duales Verfahren abgebildet werden, und es würde sich ein zu dem angegebenen Satz dualer Satz ergeben.

8. Die typische Spezialisierung der darstellenden Geometrie. 1. Ein Abbildungssystem läßt sich nach I, § 8 bis zu einem gewissem Grade eineindeutig machen, wenn man die singulären Scharen (T) und (V) mit einem gemeinsamen Strahl $T_0 = V_0$ annimmt. Schneiden sich nämlich die zu einem Bildpaar gehörenden projizierenden Kongruenzen nur in zwei Strahlen, so kann man festsetzen, daß der von $T_0 = V_0$ verschiedene Schnittstrahl der Kongruenzen als Original gemeint sei. Doch können die Kongruenzen wieder mehr als zwei Schnittstrahlen besitzen; für solche Bildpaare muß man die Hilfsmittel des vorigen Kapitels heranziehen.

In der Tat liegt diese Spezialisierung nicht nur den bekannten Methoden der darstellenden Geometrie zugrunde, sondern auch den in neuerer Zeit angegebenen speziellen Abbildungen, die sich als lineare Abbildungen des Strahlenraumes deuten lassen. Damit haben alle diese Abbildungen — man könnte sagen unbewußt — den für praktische Zwecke brauchbarsten Typus des eineindeutigen Systems gewählt. Die übliche darstellende Geometrie verwendet, wenn sie als Strahlenabbildung gedeutet wird, nur den Fall zweier projizierender Bündel m und n oder Felder μ und ν. Sie sind zugleich die singulären Scharen und haben also einen Strahl mn bzw. $\mu\nu$ gemeinsam, der als Original eines jeden Bildpaares in Frage kommt, aber stets stillschweigend ausgeschieden wird.

Bei der von Blaschke und Grünwald angegebenen kinematischen Abbildung bestehen die singulären Scharen je aus einem imaginären Strahlbüschelpaar und sind zueinander konjugiert, besitzen also einen gemeinsamen Strahl.

2. Wir diskutieren zunächst den Typus, bei dem die projizierenden Scharen einen und nur einen Strahl gemeinsam haben, während über die singulären noch nichts vorausgesetzt sei. Durch Betrachtung des konjugierten Systems erhalten wir dann den Fall, daß die singulären Scharen einen gemeinsamen Strahl besitzen.

Δ_1 und Δ_2 mögen sich in mindestens vier getrennten Punkten $n_\varkappa$ schneiden. Die Scharen (T) und (V) haben dann höchstens einen Strahl gemeinsam. Denn gingen etwa durch n_1 und n_2 die Strahlen $T_1 = V_1$ bzw. $T_2 = V_2$, so würden die durch n_3 und n_4 gehenden Strahlen der Kongruenz $[T_1, T_2] = [V_1, V_2]$ zwei den Scharen (S) und (U) gemeinsame Strahlen liefern, entgegen der Voraussetzung. Die Punkte n_1, n_2 und n_3 seien die Ecken des Fundamentaldreiecks in π mit den Koordinaten $1:0:0$, $0:1:0$ bzw. $0:0:1$. Die Hauptkomplexe von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ stellen dann nach I, § 6, 5 die durch $n_\varkappa$ gehenden Strahlen $S_\varkappa$ bzw. $U_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ dar. Ist $S_3 = U_3$, so wird:

$$\mathfrak{S} = \left\{\begin{array}{cccccc} S_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & S_{16} \\ 0 & S_{22} & 0 & -1 & 0 & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \qquad \mathfrak{T} = \left\{\begin{array}{cccccc} S_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & S_{32} \\ 0 & S_{11} & 0 & -1 & 0 & -S_{31} \\ -S_{26} & S_{16} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{U} = \left\{\begin{array}{cccccc} U_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & U_{16} \\ 0 & U_{22} & 0 & -1 & 0 & U_{26} \\ S_{31} & S_{32} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \qquad \mathfrak{V} = \left\{\begin{array}{cccccc} U_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & S_{32} \\ 0 & U_{11} & 0 & -1 & 0 & -S_{31} \\ -U_{26} & U_{16} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\}$$

Die Struktur des Koinzidenzgebildes ergibt sich aus dessen Gleichungen:

$$L(\lambda S_1 + \mu U_1, N) = 0, \quad L(\lambda S_2 + \mu U_2, N) = 0, \quad L(\lambda S_3 + \mu S_3, N) \equiv (\lambda + \mu) \cdot L(S_3, N) = 0.$$

Die Strahlen einer zu einem Werte $\lambda : \mu \neq -1$ gehörenden Regelschar schneiden, wie die 3. Gleichung besagt, den Strahl $S_3 = U_3$, ihre Risse gehen also durch n_3. Ist $\lambda : \mu = -1$, so wird der entsprechende Bestandteil des Koinzidenzbildes dargestellt durch die Gleichungen

$$L(S_1 - U_1, N) \equiv L(K_1, N) = 0, \qquad L(S_2 - U_2, N) \equiv L(K_2, N) = 0, \qquad L(0, N) = 0.$$

Er besteht aus den Strahlen, die die beiden Strahlen K_1 und K_2 mit den π-Koordinaten

$$K_{11}' = 0, \qquad K_{12}' = S_{12} - U_{11}, \qquad K_{13}' = S_{16} - U_{16}$$

bzw.

$$K_{21}' = -(S_{22} - U_{22}), \qquad K_{22}' = 0, \qquad K_{23}' = S_{26} - U_{26}$$

schneiden. Diese beiden Strahlen sind die π-Strahlen der Büschel $S_1 U_1$ und $S_2 U_2$. Ihr Schnittpunkt r hat die Koordinaten:

$$r_1 : r_2 : r_3 = (S_{26} - U_{26})(S_{11} - U_{11}) : -(S_{16} - U_{16})(S_{22} - U_{22}) : (S_{11} - U_{11})(S_{22} - U_{22}).$$

Wären diese sämtlich 0, so müßten entweder zwei Zeilen von $\mathfrak{S}$ mit zwei Zeilen von $\mathfrak{U}$ oder zwei Zeilen von $\mathfrak{T}$ mit zwei Zeilen von $\mathfrak{V}$ übereinstimmen. Die zugeordneten Regelscharen hätten dann zwei Strahlen gemeinsam, entgegen der Voraussetzung. Da n_1 und n_2 vor n_4 in keiner Weise ausgezeichnet waren und es nach II, § 6 in diesem Fall nur einen solchen ausgezeichneten Punkt r geben kann, geht auch der π Strahl K_4 des Büschels $S_4 U_4$ durch r, und daraus läßt sich auch geometrisch erkennen, daß das Bündel r dem Koinzidenzgebilde angehört.

Die Matrix der Fundamentalkorrelation wird

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{S}^0 - \mathfrak{U}^0 = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & -S_{11} + U_{11} & -S_{16} + U_{16} \\ S_{22} - U_{22} & 0 & -S_{26} + U_{26} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\}.$$

Ihr Rang ist 2, da die adjungierten Unterdeterminanten der letzten Zeile sich wie $r_1 : r_2 : r_3$ verhalten. Die Korrelation ist daher einfach ausgeartet: Der einzige singuläre Punkt des n Feldes ist der durch die Gleichungen $\mathfrak{K}(n) = 0$ bestimmte Punkt r. Allen von r verschiedenen Punkten n auf einer Geraden durch r entspricht derselbe Strahl $N' = N'' = \mathfrak{K} n$ durch n_3, den singulären Punkt des mit dem N'Felde verknüpften Punktfeldes (n'). Auch geometrisch erkennt man das. Denn von den vier projizierenden Strahlen eines durch n_3 gewählten Bildes $N' = N''$ fallen zwei, S_3 und U_3, zusammen,

und es gibt daher eine Regelschar von Strahlen, die N' zum $\mathfrak{S}$- und $\mathfrak{U}$-Riß haben. Diese enthält einen π-Strahl N' und einen r-Strahl; ihre von N' verschiedenen Strahlen schneiden also in π eine durch r gehende Punktreihe (n) aus.

Da den Punkten n_ι $(\iota = 1, 2, 4)$ die Strahlen $N_\iota' = n_\iota n_3$ entsprechen, so kann $\mathfrak{K}$ in π eindeutig festgelegt werden, indem man denjenigen Punkt $n_\varkappa$ fixiert, den man als Spurpunkt des den Scharen (S) und (U) gemeinsamen Strahles auffassen will, und indem man ferner den singulären Punkt r beliebig wählt. Die durch die Zuordnung $K_\iota \longleftrightarrow N_\iota'$ projektiv aufeinander bezogenen Büschel r und n_3 erzeugen die Inzidenzkurve J des n-Feldes, also die durch r gehende Kurve des Kegelschnittbüschels $\varDelta_1$, $\varDelta_2$. (Abb. 11).

Den durch die konjugierte Fundamentalkorrelation einem Punkte n zugeordneten Riß $\overline{M} = \overline{\overline{M}} = \mathfrak{K}'n$ findet man nach II, § 5, 3, indem man n als Punkt des Feldes (n') auffaßt und die ihm entsprechende Punktreihe (n) im n-Felde aufsucht: sie ist $\overline{M}$. So ergibt sich für $n \neq n_3$ der Strahl $\overline{M}$ durch r, der in der Projektivität der Büschel r und n_3 dem Strahl nn_3 entspricht, während n_3 jetzt der singuläre Punkt des n Feldes ist. Das Bündel n_3 gehört ja dem konjugierten Koinzidenzgebilde an, da es einen in bezug auf die $\mathfrak{T}$- und $\mathfrak{V}$-Abbildung singulären Strahl $S_3 = U_3$ enthält. Daß insbesondere den Punkten n_ι $(\iota = 1, 2, 4)$ die Strahlen $\overline{M}_\iota = K_\iota$ entsprechen, folgt auch daraus, daß diese die π-Strahlen der Büschel $S_\iota U_\iota$ sind (I, Satz 8).

Symbolisch lassen sich die Konstruktionen so zusammenfassen (Abb. 11):

$$\mathfrak{K}\,n = N' = N'' = n\,r\,J\,n_3, \qquad \mathfrak{K}\,r = 0,$$
$$\mathfrak{K}'n = \overline{M} = \overline{\overline{M}} = n\,n_3\,J\,r, \qquad \mathfrak{K}'n_3 = 0.$$

3. Der Fall, in dem die **singulären** Scharen einen und nur einen Strahl $T_3 = V_3$ gemeinsam haben, läßt sich formal aus den Betrachtungen des Abschnitts 2 gewinnen, indem man die Risse N' mit den Rissen $\overline{M}$ und $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}'$ vertauscht. So ergibt sich die »Fundamentalfigur« der Abb. 12. Symbolisch ist jetzt:

$$\mathfrak{K}\,n = N' = N'' = n\,n_3\,J\,r, \qquad \mathfrak{K}\,n_3 = 0,$$
$$\mathfrak{K}'n = \overline{M} = \overline{\overline{M}} = n\,r\,J\,n_3, \qquad \mathfrak{K}'r = 0.$$

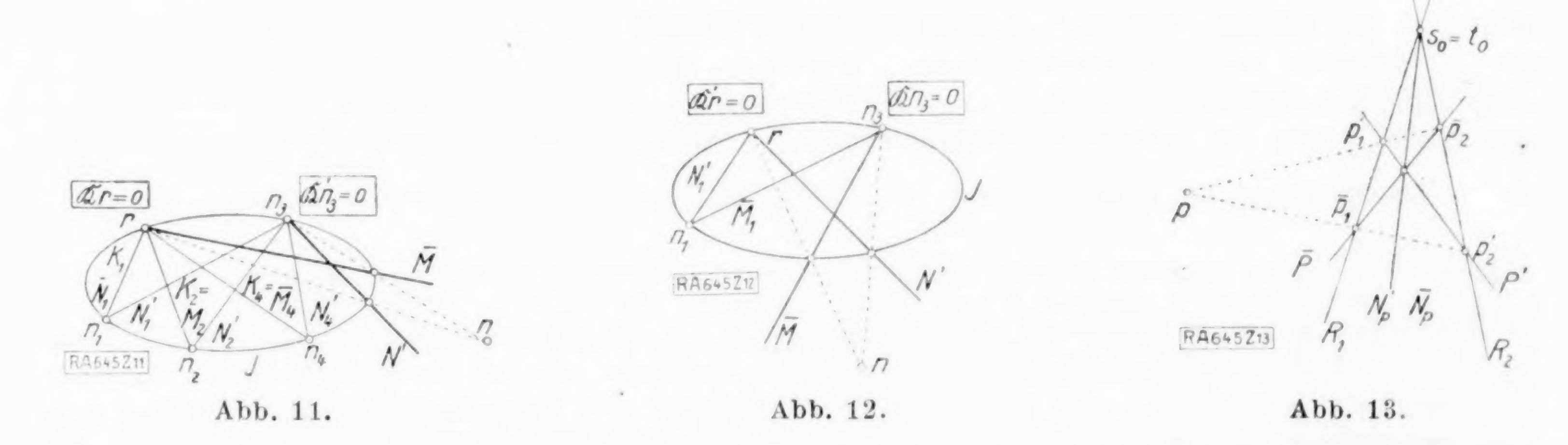


Abb. 11. Abb. 12. Abb. 13.

Diese Spezialisierung liefert also den Vorteil einer einfachen Fundamentalkorrelation. Dazu kommt die Vereinfachung, daß zu einem Bildpaar P', P'' i. a. jetzt nur ein Spurpunkt p gehört, da der zweite feste Spurpunkt n_3 nicht in Frage kommen soll. Eine von uns oft benutzte Spezialisierung anderer Art, die ebenfalls zu einem einfachen Fundamentalsystem führt, ist der Fall zweier zueinander konjugierten projizierenden Scharen. Hier ist $\mathfrak{K}$ eine Polarität mit $\varDelta_1 = \varDelta_2$ als Inzidenzkurve, und die Verwandtschaften $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ sind bequem anzugeben (II, § 1, 3). Will man alle Vorteile der beiden Spezialfälle vereinen, so läßt sich das nur erreichen, wenn die Scharen (S) und (U) zwei zueinander konjugierte Strahlbüschelpaare mit gemeinsamem Strahl $S_0 = T_0$ sind. Ist die aus einem Geradenpaar R_1, R_2 bestehende Fundamentalkurve reell, so ergibt sich ferner die für praktische Zwecke wichtige Vereinfachung, daß jeder reelle Rißstrahl reelle $\varDelta$-Punkte hat (Abb. 13). In der Tat werden in diesem Fall die Konstruktionen der Bilder einer linearen Strahlenmannigfaltigkeit übersichtlicher und lassen sich nach dem allgemeinen Muster durchführen. Doch bleibt auch hier im allgemeinen Fall die konstruktive Schwierigkeit, daß für zwei sich schneidende Strahlen P und Q die einem Bildsystem P', P'', p, Q' zugeordnete Ordnungskurve (Q'') eine Kurve 2. Klasse ist. Erst durch metrische Spezialisierungen läßt sich erreichen, daß diese Ordnungskurven sämtlich

ausarten, wie das bei der kinematischen, auch von E. Müller ausführlich diskutierten Abbildung geschieht.

Solange man mit dem rein projektiven Typus arbeitet, läßt sich diese Vereinfachung nur erzielen, wenn man zwei projizierende Bündel m und n oder Felder μ und ν verwendet. (Vergl. hierzu II, § 5,6). Sind nämlich im Fall zweier Zentralprojektionen P', P'' und Q' gewählt worden, so kommen für Q in Frage die Strahlen, die P und die zu Q' gehörende, in diesem Fall stets ausgeartete projizierende Kongruenz schneiden. Ist α das Feld mQ', so sind das die Strahlen der Büschel $[m, P]$ und $[\alpha, P]$, so daß Q'' aus dem 2. Bilde von $[m, P]$ oder dem von $[\alpha, P]$, d. h. durch $o = mn\pi$ gewählt werden kann: Die Ordnungskurve (Q'') ist in zwei Strahlbüschel ausgeartet.

Auf die Fülle von Beispielen und weiteren Spezialisierungen, die sich den Betrachtungen dieses Paragraphen angliedern lassen, kann in der vorliegenden Arbeit nicht mehr eingegangen werden. Es sei nur darauf hingewiesen, daß die von Jan de Vries[1]) angegebene Abbildung sich hier einordnen läßt. Auch die Abbildungsgesetze, zu denen Blaschke und Grünwald bei der kinematischen, von Kruppa verallgemeinerten Abbildung[2]) kommen, kann man im Rahmen dieser Theorie durch Behandlung geeigneter Hauptabbildungen gewinnen. 645

Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge.

Von WALTER TOLLMIEN in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.)

Auf Grund von Ansätzen, die Hr. Prof Prandtl kürzlich für den turbulenten Impulsaustausch bei stationären Strömungen gemacht hat[3]), werden im folgenden verschiedene Fälle der »freien Turbulenz«, d. i. von Strömungen ohne begrenzende Wände behandelt. Prandtl setzt die durch den turbulenten Impulsaustausch hervorgerufene scheinbare Schubspannung

$$\tau_{xy} = \varrho\, l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \cdot \frac{du}{dy} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei u die mittlere Geschwindigkeit in der x-Richtung, y die Koordinate senkrecht zu x ist. l bedeutet den »Mischungsweg«. Darunter ist folgendes zu verstehen: Die durch eine Flüssigkeitsschicht mit dem zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit u bei Turbulenz von links bzw. von rechts hindurchtretenden Flüssigkeitsballen haben die durchschnittliche Geschwindigkeit $u + l\frac{du}{dy}$ bzw. $u - l\frac{du}{dy}$, während die quergerichtete Mischgeschwindigkeit $l\left|\frac{du}{dy}\right|$ ist, abgesehen von einer Proportionalitätskonstanten, die man in Formel (1) in das nicht genauer bekannte l einbezogen hat. l ist keine Konstante; an einer Wand ist $l = 0$. Eine anschauliche Begründung des Ansatzes (1) ist in dem zitierten Aufsatz von Prandtl enthalten. Im folgenden wird erstens die Vermischung eines Luftstromes von gleichförmiger Geschwindigkeit mit der angrenzenden ruhenden Luft betrachtet, sodann die Ausbreitung eines Luftstrahles in den umgebenden Luftraum. Nach den Experimenten wächst dabei die Breite der Vermischungszone linear mit x, wenn x die Entfernung von der Stelle ist, wo die Vermischung einsetzt. Dieser Tatsache trägt man durch den Ansatz

$$l = c\,x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Rechnung. Die Proportionalitätskonstante c kann bislang nur durch Vergleich mit der Erfahrung ermittelt werden; sie ist die einzige empirische Konstante der Theorie. Häufig wird es zweckmäßig sein, neben x als zweite Koordinate $\eta = y/x$ einzuführen.

Wir gehen nun an die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung in speziellen Fällen.

[1]) Siehe Fußnote S. 393.

[2]) W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, Z. Math. Phys. 60 (1911), S. 61–91, 203 f. J. Grünwald, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, Stzgsb. Ak. (math. nat.) Wien, Abt. IIa, 120 (1911), S. 677–741. Müller-Kruppa, Die lin. Abb. 1923, S. 240 f.

[3]) L. Prandtl: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz; diese Zeitschrift Bd. 5 (1925), S. 136.

1. Vermischung eines homogenen Luftstromes mit der angrenzenden ruhenden Luft (ebenes Problem der freien Strahlgrenze).

Es empfiehlt sich hier auf Grund der Grenzbedingungen für die mittlere Geschwindigkeit der Ansatz

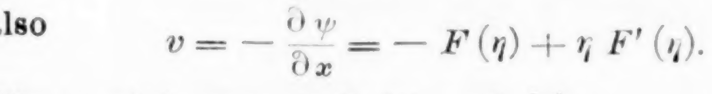
$$u = f(y/x) = f(\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dann wird die Stromfunktion

$$\psi = \int f\left(\frac{y}{x}\right) d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$= x \int f(\eta)\, d\,\eta = x\, F(\eta),$$

also



$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -F(\eta) + \eta\, F'(\eta).$$

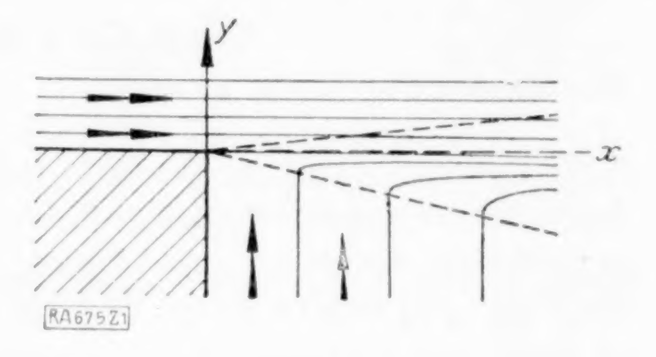


Abb. 1.

Für τ setzt man nach (1) und (2)

$$\frac{\tau}{\varrho} = c^2 x^2 \left|\frac{d\,u}{d\,y}\right| \cdot \frac{d\,u}{d\,y}.$$

Es bestehen folgende Randbedingungen: Am ersten Rande η_1 (homogener Luftstrom), $u =$ konst. oder bei Einführung eines passenden Maßstabes $u = 1$, d. i.

$$F'(\eta_1) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

ferner

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

eine Bedingung, durch die stetiger Anschluß erzielt wird:

$$\text{d. i.} \quad F''(\eta_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6);$$

$$v(\eta_1) = 0,$$

$$\text{d. i.} \quad F(\eta_1) = \eta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7);$$

am 2. Rande η_2 (ruhende Luft) muß sein $u = 0$

$$\text{d. i.} \quad F'(\eta_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

außerdem zur Erzielung stetigen Anschlusses $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$,

$$\text{d. i.} \quad F''(\eta_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Die Bewegungsgleichung in der x-Richtung lautet, da man in erster Näherung den Druck als konstant annehmen kann:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Wenn man y bzw. η von der ruhenden nach der bewegten Luft zählt, erhält man nach Einführung unserer Ansätze[1]) als Bewegungsgleichung

$$F F'' + 2\, c^2 F''\, F''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

die entweder durch $F'' = 0$ oder $F + 2\, c^2 F''' = 0$ gelöst wird. Im einen Fall erhält man gleichförmige Geschwindigkeit, im andern Falle veränderliche. Die letzte Lösung gilt offenbar zwischen η_1 und η_2, die andere außerhalb dieser Grenzen. In den Randpunkten stoßen die Lösungen mit Unstetigkeit in F''' zusammen. Um die Geschwindigkeitsverteilung in der Vermischungszone zu bestimmen, hat man also die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$F + 2\, c^2 F''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

zu lösen. Zweckmäßig führt man bis auf weiteres einen neuen Maßstab für η ein, so daß sich (11) vereinfacht zu

$$F + F''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a).$$

Hieraus erhält man

$$F = c_1\, e^{-\eta} + c_2\, e^{\eta/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\eta + c_3\, e^{\eta/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\,.$$

Die fünf Randbedingungen bestimmen die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3, außerdem die ja noch unbekannten Randpunkte η_1 und η_2 selbst.

---

[1]) Man sieht an dieser Stelle leicht, daß der Ansatz $u = f(\eta)$ zwangläufig ein zu x proportionales l erfordert.

Die Rechnung ordnet man passend so an: Man führt ein

$$\bar{\eta} = \eta - \eta_1 \qquad \text{oder} \qquad \eta = \bar{\eta} + \eta_1 ,$$

dann wird

$$F = d_1\, e^{-\bar{\eta}} + d_2\, e^{\bar{\eta}/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{\eta} + d_3\, e^{\bar{\eta}/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{\eta} .$$

Die Randbedingungen werden

$$F(\bar{\eta}) = \eta_1, \quad F'(\bar{\eta}) = 1, \quad F''(\bar{\eta}) = 0 \text{ für } \eta = 0, \quad F'(\bar{\eta}) = 0, \quad F''(\bar{\eta}) = 0 \text{ für } \bar{\eta}_2 \qquad (12\,\text{a—e}).$$

Aus (12a—c) kann man d_1, d_2, d_3 linear in $\bar{\eta}_1$ ausdrücken, aus (12d) erhält man $\bar{\eta}_1$ ausgedrückt durch $\bar{\eta}_2$, (12e) liefert dann schließlich eine transzendente Gleichung für $\bar{\eta}_2$, die durch sukzessive Approximation gelöst wird. Man erhält

$$\bar{\eta}_2 = -3{,}02, \quad \eta_1 = 0{,}981, \quad \eta_2 = -2{,}04, \quad d_1 = -0{,}0062, \quad d_2 = 0{,}987, \quad d_3 = 0{,}577.$$

Hiermit ist F und F' als Funktion von η bestimmt. Beim Vergleich mit der Erfahrung muß man zu dem ursprünglichen Maßstab zurückkehren, indem man das bisher verwandte reduzierte η mit $\sqrt[3]{2c^2}$, ebenso das reduzierte F' mit U, der Geschwindigkeit des homogenen Luftstromes multipliziert. Aus der Tabelle und aus den Abb. 2 bis 4 ist der Verlauf der Geschwindigkeit und der Stromlinien zu entnehmen. Dabei sind die Stromlinien, ebenso wie in den folgenden Fällen, für äquidistante Werte der Stromfunktion gezeichnet. Die Stromlinie, die von $x = 0$ ausgeht, ist eine Gerade mit dem Neigungswinkel

$$-\operatorname{arctg}\,(0{,}19\,\sqrt[3]{2\,c^2}).$$

Abb. 2. Freie Strahlgrenze.

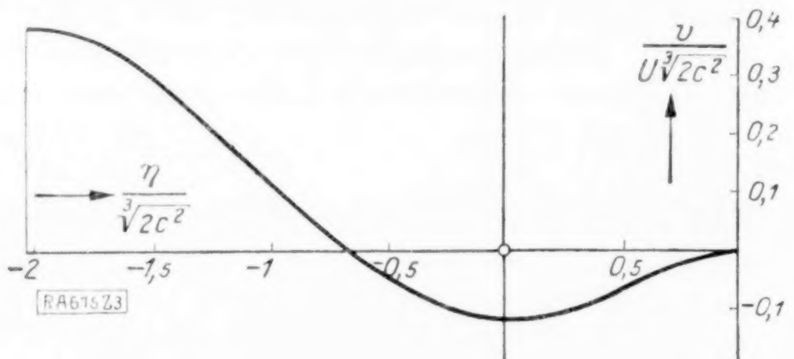
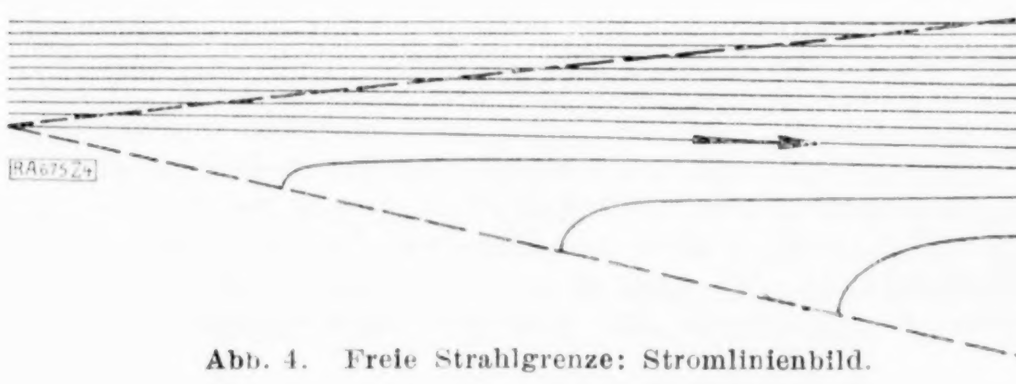


Abb. 3. Freie Strahlgrenze.



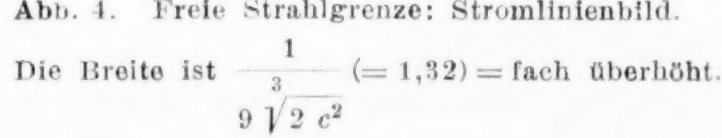


Abb. 4. Freie Strahlgrenze: Stromlinienbild.

Die Breite ist $\frac{1}{9\sqrt[3]{2\,c^2}}$ (= 1,32) = fach überhöht.

Zum Vergleich ist eine Göttinger Messung[1]) des Staudruckverlaufes mit einem selbst aufzeichnenden Druckschreiber am Rande der Düse des großen Versuchskanales verwandt worden. Der Abstand vom Düsenrande war 112 cm, der Staudruck des ungestörten Strahles $q = 56$ kg/m². Man kann annehmen, daß die Voraussetzungen des ebenen Problems bei der Größe der

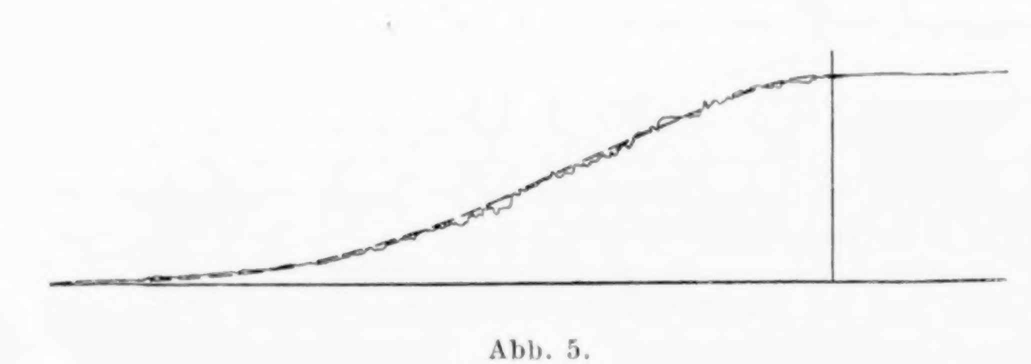


Abb. 5.

[1]) Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. II. Lieferung, S. 73.

Düse zutreffen. In der Abb. 5 ist über dem gemessenen Staudruck der berechnete gestrichelt eingetragen. Die unbekannte Proportionalitätskonstante c bestimmt sich aus dem Umrechnungsfaktor für η, der $\sqrt[3]{2\,c^2} = 0{,}0845$ ist. Die Breite der Vermischungszone wird

$$b = \sqrt[3]{2\,c^2} \cdot 3{,}02\,x = 0{,}0845 \cdot 3{,}02\,x = 0{,}255\,x.$$

Als Mischungsweg ergibt sich

$$l = 0{,}0174\,x = 0{,}0682\,b.$$

Hier fällt besonders die relative Kleinheit von l auf. Die Uebereinstimmung zwischen der berechneten und der gemessenen mittleren Geschwindigkeitsverteilung ist sehr gut.

2. Strahlausbreitung als ebenes Problem. Aus einer Wand ströme durch einen engen Spalt, den man für die Rechnung als linienförmig ansehen kann, ein Luftstrahl und vermische sich mit der umgebenden ruhenden Luft. Nehmen wir zunächst an, daß im Strahl derselbe Druck herrsche, wie außen, so können wir leicht durch eine Anwendung des Impulssatzes eine Separation der Variablen, das sind wiederum x und η erzielen. Wegen des konstanten Druckes muß nämlich der Impuls in der x-Richtung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,d\,y = \text{konst. sein.}$$

Setzt man $u = \varphi(x)\,f(\eta)$, so erhält man

$$\varphi^2(x) \cdot x \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\eta)\,d\,\eta = \text{konst.}$$

Folglich ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$u = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\eta) \quad \text{. . . . . (13a)}$$

$$\psi = \int \frac{1}{\sqrt{x}} f(\eta)\,d\,y = \sqrt{x} \int f(\eta)\,d\,\eta = \sqrt{x}\,F(\eta) \quad \text{. . . . (13b),}$$

$$v = -\frac{1}{2\sqrt{x}} F(\eta) + \frac{1}{\sqrt{x}} F'(\eta) \cdot \eta \quad \text{. . . . . . (13c).}$$

Man kann nun wie bei (**1**) die Bewegungsgleichung aufstellen, die sich in diesem Falle aber sofort einmal integrieren läßt. Dieses Zwischenintegral erhält man auch direkt aus dem Impulssatz. Grenzt man eine Kontrollfläche nach Abb. 6 ab, so ist der durch die untere Begrenzung hereinwandernde Impuls $\varrho\,u\,v$, an der anderen Seite tritt die Impulsänderung $\varrho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty}^{y} u^2\,d\,y$ auf. Als äußere Kraft ist die turbulente Schubspannung

$$\tau = \varrho\,c^2\,x^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \frac{\partial u}{\partial y}$$

wirksam, so daß die Beziehung besteht:

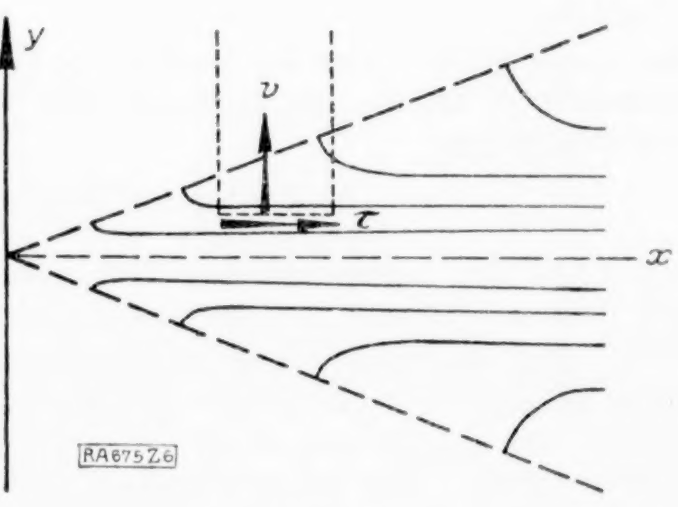


Abb. 6.

$$u\,v + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty}^{y} u^2\,d\,y = \frac{\tau}{\varrho}.$$

Man erhält hieraus die Gleichung für $F(\eta)$:

$$2\,c^2\,F''^2 = F\,F' \quad \text{. . . . . (14)}$$

(gültig für positive η, für negative η erhält man spiegelbildliche Geschwindigkeitsverteilung).

Durch Einführung eines passenden Maßstabes für η vereinfacht man die Differentialgleichung zu

$$F''^2 = F\,F' \quad \text{. . . . . (14a).}$$

Diese Differentialgleichung läßt sich in ihrer Ordnung erniedrigen, wenn man als neue abhängige Variable $z = \ln F$, also $F = e^z$ einführt. Man erhält dann $(z'' + z'^2)^2 = z'$ und, wenn man $z' = Z$ setzt, die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$Z' = -Z^2 - \sqrt{Z}.$$

Die Lösung der ursprünglichen Gleichung erfordert danach nur Quadraturen und Delogarithmierung.

Es müssen folgende Bedingungen befriedigt werden: Für $\eta = 0$ (Mitte des Strahles) ist $v = 0$, d. h. $F = e^z = 0$. Da $u \sim F' = z' e^z$ für $\eta = 0$ nicht verschwinden soll, so muß z' für $\eta = 0$ von gleicher Ordnung ∞ werden, wie e^z zu 0 wird. Bei passender Maßstabbestimmung muß also für $\eta = 0$:

$$F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\text{a}), \qquad F' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\text{b})$$

sein. Damit hat man zwei Bedingungen, durch die z, das einer Differentialgleichung 2. Ordnung genügt, vollständig bestimmt ist.

Aus der Randbedingung $u = 0$, d. i. $z' = Z = 0$ . . . . (16)

für den Rand η_r bestimmt sich dann der Randpunkt η_r selbst.

Aus der Gl. (14) erhält man durch Integration

$$\eta = C - \frac{2}{3}\left\{\ln(\sqrt{Z}+1) - \ln\left[(Z - \sqrt{Z} + 1)^{1/2}\right] + \sqrt{3}\,\text{arctg}\,\frac{2\sqrt{Z}-1}{\sqrt{3}}\right\} \quad . \quad (17).$$

Aus der Bedingung $z' = Z = \infty$ für $\eta = 0$ bestimmt sich die Integrationskonstante C:

$$O = C - \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ zu } C = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Die Bedingung (16) $Z = 0$ für η_r liefert

$$\eta_r = C - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\text{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 2{,}412.$$

Um die Bedingungen (15) vollständig zu befriedigen, muß das Verhalten der Differentialgleichung (14) bei $\eta = 0$, $Z = \infty$ studiert werden. Da die Lösung (17) in diesem Bereich unbequem wird, leitet man eine neue Form der Lösung ab, die bei $\eta = 0$, $Z = \infty$ gilt. Für $Z \to \infty$ geht offenbar

$$\frac{dZ}{d\eta} \to -Z^2, \qquad \text{d. h.} \qquad Z = z' \to \frac{1}{\eta}.$$

Folglich $\qquad z \to \ln \eta + c_1, \qquad$ so daß $\qquad F' = z' e^z = e^{c_1}$

für $\eta = 0$ wird. Aus der Bedingung (15b) bestimmt sich demnach die letzte Integrationskonstante c_1 zu 0. Als asymptotische Näherung bei $\eta = 0$ erhält man auf Grund dieser Ueberlegungen

$$z' = \frac{1}{\eta} - 0{,}4\sqrt{\eta} + 0{,}01\,\eta^2 \ldots, \qquad z = \ln \eta - \frac{0{,}8}{3}\eta^{3/2} + \frac{0{,}01}{3}\eta^3 \ldots \quad . \quad (18).$$

Die Güte der asymptotischen Näherung (18) beurteilt man leicht durch Vergleich mit der exakten Lösung (17) in einem Gebiet, in dem beide Lösungsformen geeignet sind.

Der Rechnungsgang ist folgender: Man berechnet $\eta(Z)$ und damit $Z(\eta) = z'(\eta)$ nach Formel (17) und erhält hieraus, etwa durch graphische Integration $z(\eta)$, wobei im Gebiet um $\eta = 0$, $z' = \infty$ die soeben abgeleitete asymptotische Näherung (18) berücksichtigt wird. Hieraus erhält man dann die gesuchten Funktionen $F = e^z$ und $F' = z' e^z$ durch Delogarithmierung und Multiplikation.

Die Lösung $F =$ konst. schließt sich an die eben abgeleitete Lösung nach außen hin wiederum mit einer Unstetigkeit in F''' an. In der Mitte $(\eta = 0)$ verhält sich F' wie $1 - 0{,}4\,\eta^{3/2}$, was ein Verschwinden des Krümmungsradius mit sich führt[1]). Zum Vergleich mit der Erfahrung hat man in der aus der Tabelle ersichtlichen Weise von den soeben berechneten reduzierten zu den ursprünglichen Größen zurückzugehen. Der Umrechnungsfaktor für η ist $\sqrt[3]{2\,c^2}$. s bedeutet in der Tabelle einen charakteristischen Abstand vom

[1]) Prandtl hat (l. c.) eine Verfeinerung der Theorie angegeben, durch die sich das Verschwinden des Krümmungsradius in der Mitte vermeiden läßt. Doch soll hierauf, als zu weit abführend, nicht eingegangen werden.

Freie Strahlgrenze				Ebener Strahl				Runder Strahl			
$\frac{\eta}{\sqrt[3]{2c^2}}$	$\frac{F'}{U}$	$\frac{F}{U\sqrt[3]{2c^2}}$	$\frac{v}{U\sqrt[3]{2c^2}}$	$\frac{\eta}{\sqrt[3]{2c^2}}$	$\frac{F'}{U_s \cdot \sqrt{s}}$	$\frac{F}{U_s \cdot \sqrt{s}\sqrt[3]{2c^2}}$	$\frac{v}{U_s \cdot \sqrt{s}\sqrt[3]{2c^2}}$	$\frac{\eta}{\sqrt[3]{c^2}}$	$\frac{F'}{U_s \cdot s\eta}$	$\frac{F}{U_s \cdot s\eta \cdot \sqrt[3]{c^2}}$	$\frac{v}{U_s \cdot s\sqrt[3]{c^2}}$
0,981	1	0,981	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0,731	0,969	0,732	− 0,022	0,05	0,995	0,050	0,025	0,0625	0,995	0 031	0,031
0,481	0,895	0,500	− 0,069	0,1	0,979	0,099	0,049	0,125	0,977	0,062	0,060
0,231	0,791	0,286	− 0,104	0,15	0,962	0,148	0,070	0,25	0,941	0,121	0,114
− 0,019	0,668	0,104	− 0,117	0,2	0,940	0,195	0,091	0,375	0,895	0,176	0,160
− 0,269	0,538	− 0,047	− 0,096	0,4	0,842	0,374	0,150	0,5	0,843	0,227	0,194
− 0,519	0,411	− 0,166	− 0,047	0,6	0,721	0,530	0,168	0,625	0,789	0,274	0,219
− 0,769	0,296	− 0,254	+ 0,027	0,8	0.604	0,664	0,151	0,75	0,727	0,314	0,230
− 1,019	0,193	− 0,312	+ 0,115	1	0,474	0,766	0,091	1	0,606	0,381	0,225
− 1,269	0,112	− 0,351	+ 0,209	1,2	0,357	0,850	0,003	1,25	0,487	0,427	0,182
− 1.519	0,049	− 0,371	+ 0,297	1,4	0,254	0,910	− 0,099	1,5	0,376	0,455	0,109
− 1,769	0,012	− 0,379	+ 0,358	1,6	0,165	0,951	− 0,212	1,75	0,283	0,467	0,028
− 2,019	0	− 0,379	+ 0,379	1,8	0,095	0,976	− 0,318	2	0,198	0,462	− 0,066
− 2,039	0	− 0,379	+ 0,379	2	0,046	0,989	− 0,402	2,25	0,130	0,452	− 0,159
				2,2	0,013	0,995	− 0,469	2,5	0,077	0,430	− 0,237
				2,4	0	0,996	− 0,498	2,75	0,039	0,405	− 0,298
								3	0,014	0,376	− 0,334
								3,25	0,002	0,350	− 0,344
								3,4	0	0,335	− 0,335

Spalt, bei dem die Geschwindigkeit in der Mitte des Strahles gleich U_s ist. Gemäß (13a) ist dann die Geschwindigkeit in der Strahlmitte in der Entfernung x vom Spalt

$$U_m(x) = U_s \sqrt{\frac{s}{x}}.$$

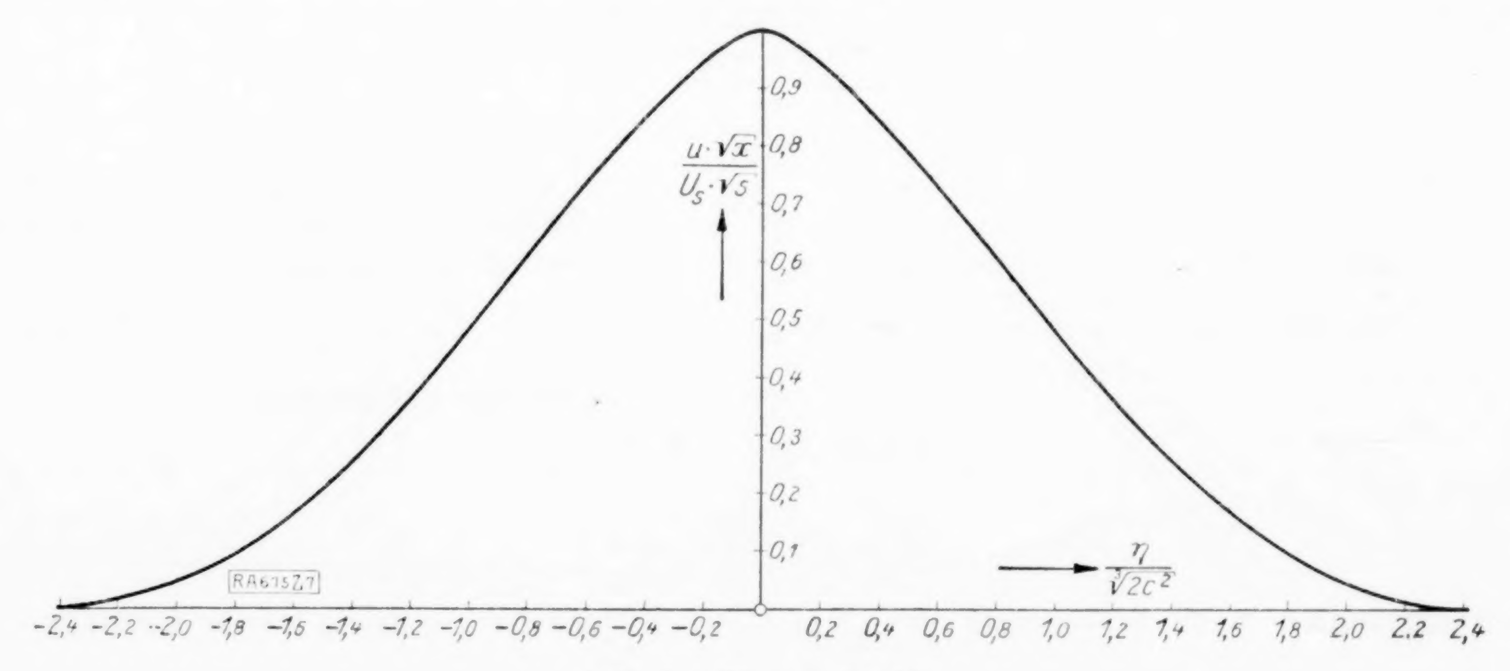


Abb. 7. Ebener Strahl.

3. Strahlausbreitung als rotationssymmetrisches Problem. Das entsprechende rotationssymmetrische Problem, bei dem sonach aus einem sehr engen Loch in einer Wand ein Luftstrahl schießt, wird in genau entsprechender Weise behandelt wie das ebene Problem. Zunächst gelingt es wiederum leicht, die Variablen x und η zu trennen. Nimmt man nämlich an, daß der Druck im Strahl konstant ist, so muß

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 y\, dy = \text{konst. sein,}$$

woraus sich für u der Ansatz

$$u = \frac{1}{x} f(\eta) \quad \text{ergibt.}$$

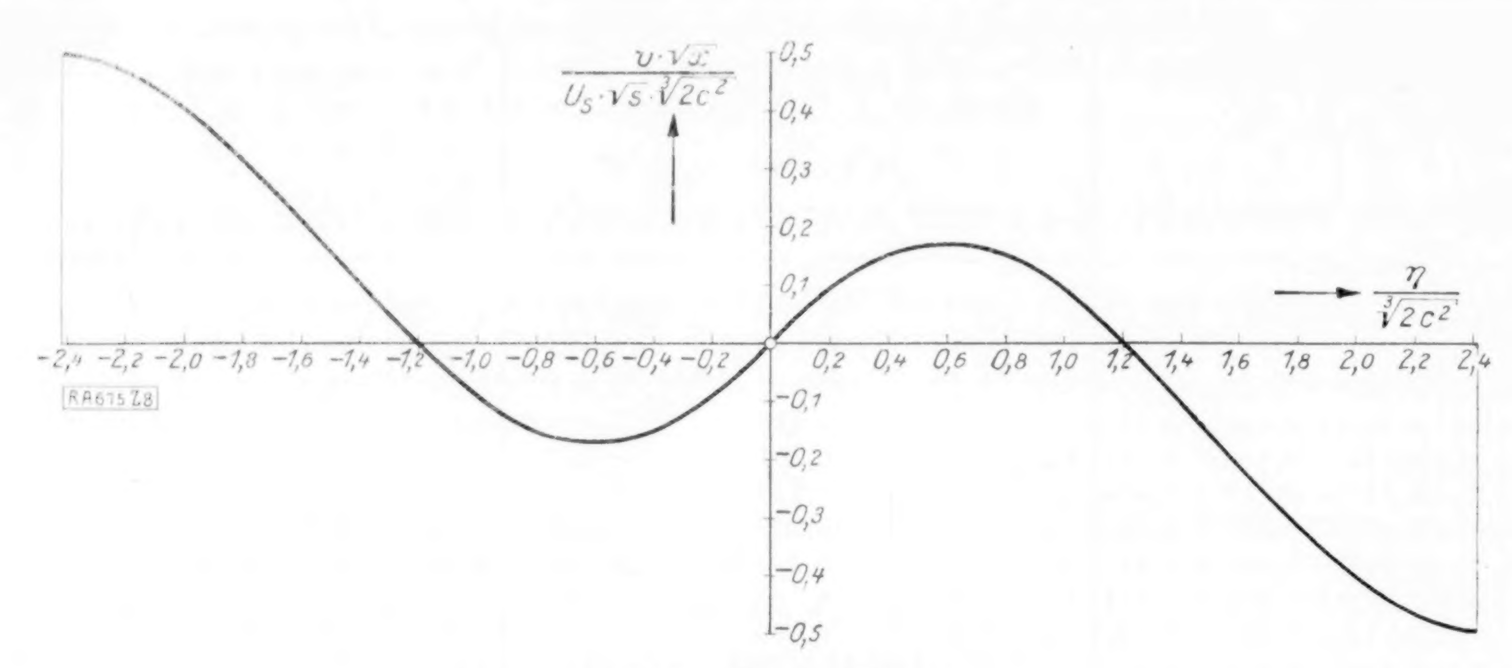


Abb. 8. Ebener Strahl.

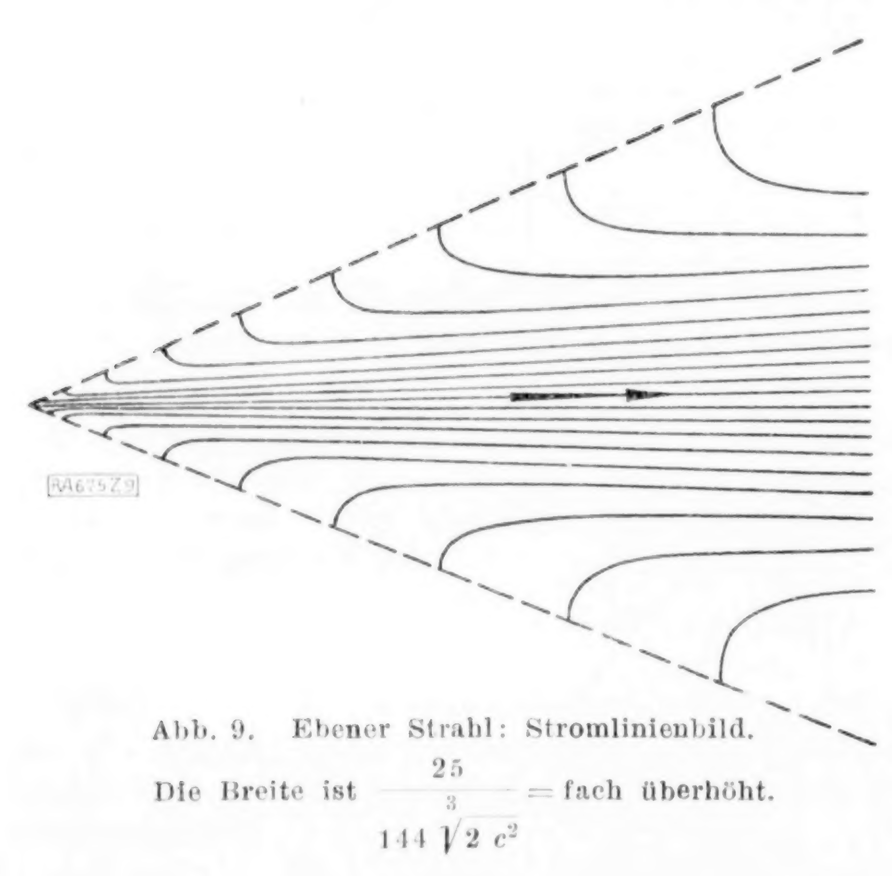


Abb. 9. Ebener Strahl: Stromlinienbild. Die Breite ist $\frac{25}{144\sqrt[3]{2c^2}}$ = fach überhöht.

Setzt man

$$\int f(\eta)\cdot\eta\, d\eta = F(\eta)\,,$$

so wird

$$u = \frac{F'}{x\,\eta}\,, \qquad v = \frac{F'}{x} - \frac{F}{x\,\eta}.$$

In derselben Weise wie beim ebenen Problem gewinnt man die Differentialgleichung für F durch Integration der Bewegungsgleichung oder durch nochmalige Anwendung des Impulssatzes in Analogie zu Abb. 6

$$c^2\left(F'' - \frac{F'}{\eta}\right)^2 = F\,F' \quad (19).$$

Durch Einführung eines passenden Maßstabes für η vereinfacht man die Differentialgleichung zu

$$\left(F'' - \frac{F'}{\eta}\right)^2 = F\,F' \quad (19\,a).$$

Durch die Substitution

$$z = \ln F\,, \qquad F = e^z$$

erhält man:

$$\left(z'' + z'^2 - \frac{z'}{\eta}\right)^2 = z'\,,$$

und schließlich, nach Einführung von $Z = z'$ die Differentialgleichung erster Ordnung

$$Z' = \frac{Z}{\eta} - Z^2 - \sqrt{Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Dazu kommen folgende Bedingungen bei $\eta = 0$: u darf nicht verschwinden, während $v = 0$ wird; d. h. $F(0) = e^{z(0)} = 0$, während $\frac{F'}{\eta} = \frac{z'\,e^z}{\eta}$ endlich bleibt und bei passender Normierung gleich 1 wird.

Man kann nun eine Reihenentwicklung von $Z(\eta)$ um $\eta = 0$ ansetzen, derart, daß diese Bedingungen erfüllt sind. z muß negativ ∞ bei $\eta = 0$ werden, damit $e^z = 0$ wird, und zwar wie $\ln \eta^2$; denn dann nimmt $\frac{F'}{\eta}$ gerade einen endlichen Wert an. Es ergibt sich demnach folgende Reihenentwicklung, die in Potenzen von $\eta^{3/2}$ fortschreitet:

$$Z = \frac{2}{\eta} + a\sqrt{\eta} + b\,\eta^2 + c\,\eta^{7/2} + d\,\eta^5 + e\,\eta^{13/2} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Die Koeffizienten bestimmt man durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung und Vergleich gleicher Potenzen:

$$a = -\frac{2}{7}\sqrt{2}, \qquad b = -\frac{1}{245}, \qquad c = \frac{\sqrt{2}}{1715}, \qquad d = \frac{37}{240\,100}, \qquad e = 0{,}000014\,\ldots$$

Die Konvergenz dieser Reihenentwicklung wird bei Annäherung an den Randpunkt $\eta_r\,(Z = 0)$ schlecht, doch kann man eine Entwicklung angeben, die gerade in der Umgebung von η_r gut verwendbar ist. Man setzt

$$\bar{\eta} = \eta_r - \eta$$

und

$$Z = \bar{a}\,\bar{\eta}^2 + \bar{b}\,\bar{\eta}^3 + \bar{c}\,\bar{\eta}^4 + \bar{d}\,\bar{\eta}^5 + \bar{e}\,\bar{\eta}^6 + \bar{f}\,\bar{\eta}^7\,\ldots$$

und erhält

$$\bar{a} = \frac{1}{4}, \qquad \bar{b} = -\frac{1}{8\,\eta_r}, \qquad \bar{c} = -\frac{3}{64\,\eta_r^2}, \qquad \bar{d} = \frac{1}{64} - \frac{3}{128\,\eta_r^3}$$

$$\bar{e} = -\frac{19}{256 \cdot 5\,\eta_r} - \frac{133}{256 \cdot 40\,\eta_r^4}, \qquad \bar{f} = -\frac{0{,}00278}{\eta_r^2} + \frac{\ldots}{\eta_r^5}\,\ldots$$

Die unbekannte Integrationskonstante η_r bestimmt sich, indem man die Werte für Z, wie man sie aus beiden Entwickelungen bekannt, in einem bestimmten Anschlußpunkte übereinstimmen läßt. Es wird $\eta_r = 3{,}4$.

$\frac{F'}{\eta}$ verhält sich in der Mitte wie $1 - 0{,}202\,\eta^{3/2}$. Der Anschluß in F nach außen erfolgt wiederum mit einer Unstetigkeit in F'''. Der Umrechnungsfaktor vom reduzierten zum eigentlichen η ist hier $\sqrt[3]{c^2}$. s bedeutet in der Tabelle einen charakteristischen Abstand vom Ausflußloch, bei dem die Geschwindigkeit in der Mitte des Strahles U_s ist.

Die berechneten Geschwindigkeitsverteilungen sind mit Göttinger Messungen (l. c.) verglichen worden. Der Durchmesser der Düse, aus der die Luft strömte, war 137 mm. Zum Vergleich herangezogen wurden die Geschwindigkeitsverteilungen in Entfernung 100 cm und 150 cm vom Düsenrand. Man darf diesen Düsenabstand a nicht gleich x setzen;

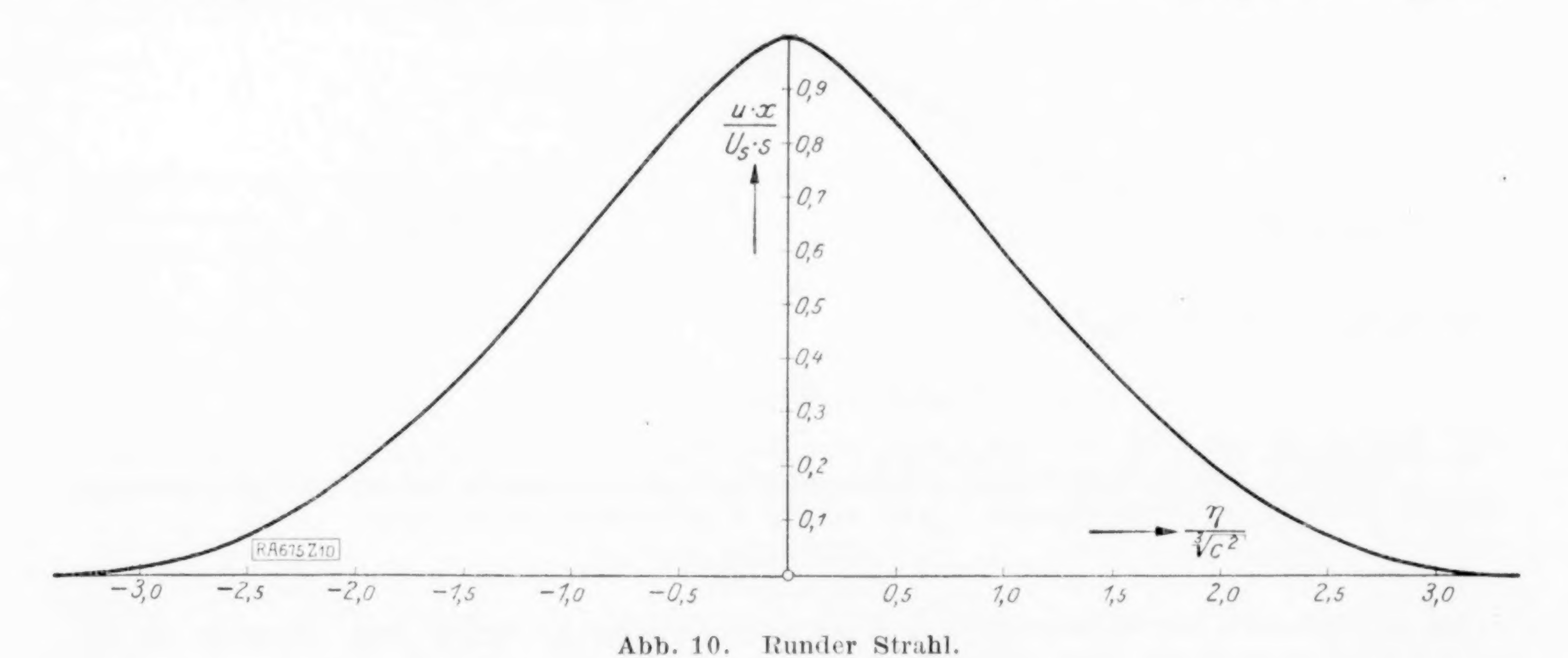


Abb. 10. Runder Strahl.

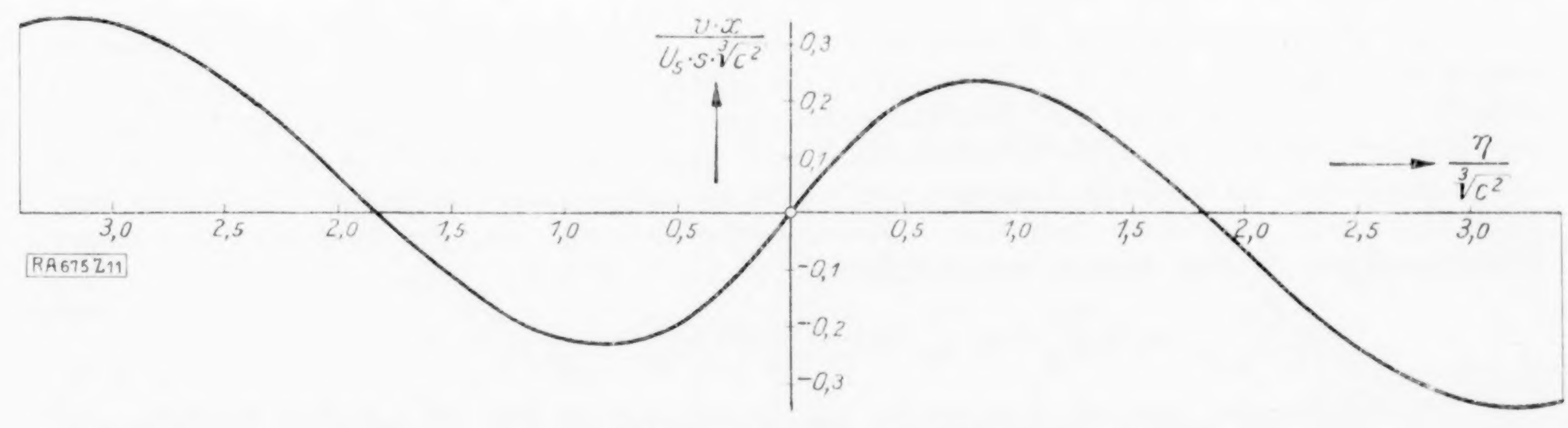


Abb. 11. Runder Strahl.

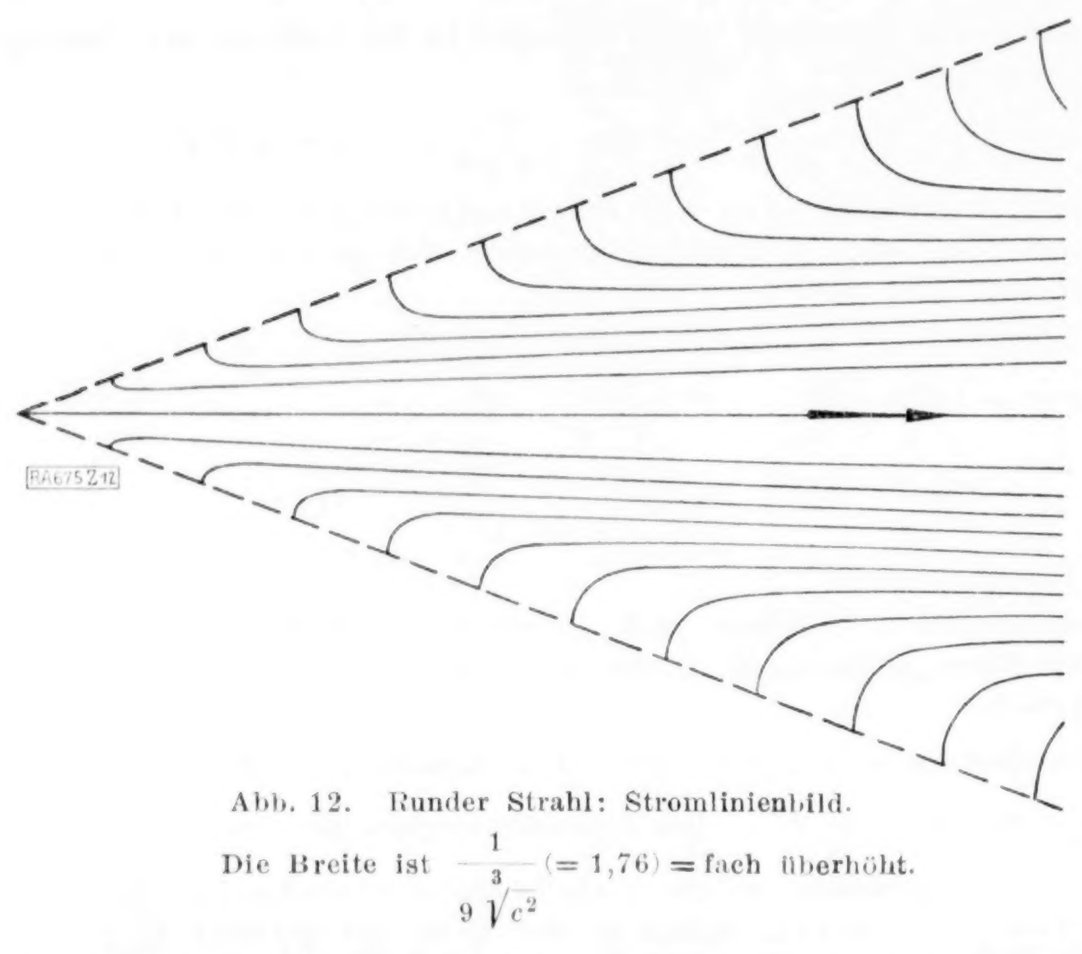


Abb. 12. Runder Strahl: Stromlinienbild. Die Breite ist $\frac{1}{9\sqrt[3]{c^2}}$ $(=1,76)$ = fach überhöht.

denn in unseren Rechnungen war ein punktförmiges Ausströmungsloch angenommen. x berechnet sich vielmehr aus a durch Addition einer konstanten Größe e, die sich z. B. aus der Tatsache ergibt, daß für größere a, für die der Vergleich mit unseren Rechnungen allein zulässig ist, die Zentralgeschwindigkeit wie $\frac{1}{x}$ abnimmt. Im vorliegenden Falle wurde $e = 26$ cm. In der Abb. 13 sind die berechneten und die gemessenen Staudrucke für $a = 100$ cm eingetragen, der Staudruck in der Ausflußmündung ist 104 kg/m²; die Uebereinstimmung der Mittelwerte ist gut; abgesehen von einer gewissen Unsymmetrie des Strahles, die andere Gründe gehabt haben muß. Aus dem Umrechnungsfaktor für η ergibt sich

$$\sqrt[3]{c^2} = 0,063.$$

Abb. 13.

Der Radius r des Strahles ist

$$r = \sqrt[3]{c^2} \cdot 3,4\, x = 0,063 \cdot 3,4\, x = 0,214\, x.$$

Der Mischungsweg l ist $= c\,x = 0,0158\, x = 0,0729\, r$.

Zimm [1]) hat entsprechende experimentelle Untersuchungen bei wesentlich kleineren Geschwindigkeiten vorgenommen. Aus seinen Ergebnissen würde man

$$\sqrt[3]{c^2} = 0,080$$

erhalten, während der Staudruck in der Ausflußmündung 5,1 kg/m² war. Danach ist ein schwaches Anwachsen des Mischungsweges mit abnehmender Reynoldsscher Zahl wahrscheinlich.

4. Berechnung der Druckunterschiede. In allen Fällen war bisher konstanter Druck vorausgesetzt worden. Diese erste Näherung läßt sich in folgender Weise verbessern. Man untersucht die Druckunterschiede, die durch Impulsänderung auf Grund der bisher errechneten Geschwindigkeiten und Spannungen bewirkt werden, verbessert diese nach den errechneten Drücken usf. Um den ersten Schritt dieses Verfahrens auszuführen, geht man etwa von der 2. Bewegungsgleichung aus, die nach den bisherigen Bezeichnungen in den beiden ersten Fällen

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

[1]) Forschungsarbeiten aus dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 234: »Ueber die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl«. Von Dr.-Ing. Walter Zimm, 1921.

im rotationssymmetrischen Falle:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial (\sigma_y y)}{\partial y} - \frac{\sigma_t}{y}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

lautet. σ_y und σ_t sind Normalspannungen, die in der y-Richtung bzw. senkrecht zu y und x wirksam sind. Man integriert nach y:

$$[v^2]_0^y + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u\,v\,d\,y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \tau\,d\,y - \frac{1}{\varrho}[\sigma_y]_0^y = -\frac{1}{\varrho}[p]_0^y \quad . \; . \; . \quad (22)$$

bzw.

$$[v^2]_0^y + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u\,v\,d\,y + \int_0^y \frac{v^2}{y}\,d\,y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \tau\,d\,y - \frac{1}{\varrho}[\sigma_y]_0^y - \frac{1}{\varrho}\int_0^y \frac{\sigma_y}{y}\,d\,y$$

$$+ \frac{1}{\varrho}\int_0^y \frac{\sigma_t}{y}\,d\,y = -\frac{1}{\varrho}[p]_0^y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23),$$

was einer Anwendung des Impulssatzes gleichkommt. Vernachlässigt man, wie bisher immer, die Normalspannungen, also hier σ_y und σ_t, so erhält man im Fall:

der freien Strahlgrenze

$$[2\,F\,F'\,\eta - F^2]_{\eta_2}^{\eta_1} - 2\int_{\eta_2}^{\eta_1} F'^2\,\eta\,d\,\eta = \frac{1}{\varrho}[p]_{y_2}^{y_1},$$

der ebenen Strahlausbreitung

$$\frac{1}{x}\left[F\,F'\,\eta - \frac{F^2}{4}\right]_0^\eta = \frac{1}{\varrho}[p]_0^y,$$

der achsialsymmetrischen Strahlausbreitung

$$\left[\frac{2\,F\,F'}{x^2\,\eta}\right]_0^\eta + \int_0^\eta \frac{F^2}{x^2\,\eta^3}\,d\,\eta = \frac{1}{\varrho}[p]_0^y.$$

Bezeichnet man mit p_r den Druck am Rande des Strahles, mit p_m den in der Mitte des Strahles bzw. den des homogenen Luftstromes, so erhält man durch Spezialisierung obiger Formeln:

$$\frac{p_m - p_r}{\varrho} = 0{,}410\,(2\,c^2)^{2/3}\,U^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{p_m - p_r}{\varrho} = 0{,}248\,(2\,c^2)^{2/3}\,U_m^2\,(x)$$

bzw.

$$\frac{p_m - p_r}{\varrho} = -\,0{,}316\,(c^2)^{2/3}\,U_m^2\,(x).$$

U bedeutet die Geschwindigkeit des homogenen Luftstromes, $U_m(x)$ die Zentralgeschwindigkeit bei x. Im ersten und dritten Fall ist c ermittelt worden, man erhält für diese Werte

$$p_m - p_r = 0{,}00584\,\frac{\varrho\,U^2}{2},$$

bzw.

$$p_m - p_r = -\,0{,}0025\,\frac{\varrho\,U_m^2\,(x)}{2}.$$

Man sieht, daß diese so errechneten Druckunterschiede wegen ihrer Kleinheit die Geschwindigkeiten nicht wesentlich modifizieren.

Will man die Druckdifferenz gegenüber der ruhenden Luft berechnen, so muß man berücksichtigen, daß am Strahlrand ein Unterdruck gleich dem Staudruck der radialen Zuströmgeschwindigkeit herrscht. Ist p_0 der Druck der ruhenden Luft, so erhält man

$$p_m - p_0 = 0{,}338\,(2\,c^2)^{2/3}\,\varrho\,U^2 = 0{,}00482\,\frac{\varrho\,U^2}{2}\;^{1)}$$

bzw.

$$p_m - p_0 = 0{,}124\,(2\,c^2)^{2/3}\,\varrho\,U_m^2\,(x)$$

bzw.

$$p_m - p_0 = -\,0{,}372\,(c^2)^{2/3}\,\varrho\,U_m^2\,(x) = -\,0{,}00295\,\frac{\varrho\,U_m^2}{2}\,(x).$$

---

[1]) Diese Beziehung ist wichtig für die Eichung von Staugeräten in einem aus einer Düse ausfließenden Strahl.

In den ebenen Fällen erhält man also Ueberdruck im Innern des Strahles, im rotationssymmetrischen Falle dagegen Unterdruck. Dies überraschende Ergebnis, das auch einer rohen Impulsbetrachtung widerspricht, weist auf eine Lücke in der Theorie hin. Die notwendige Erweiterung soll im folgenden gegeben werden.

5. Erweiterter Ansatz für die scheinbaren Spannungen. Der bisher verwandte Ansatz für die durch den turbulenten Impulsaustausch erzeugten Spannungen

$$\tau = l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_t = 0$$

ist nicht mehr als eine erste Näherung. Allerdings kann man leicht nachweisen, daß $\frac{\partial u}{\partial y}$ in den betrachteten Fällen groß gegen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ ist, so daß der Ansatz für die durch die Geschwindigkeitsunterschiede bedingte Mischgeschwindigkeit $l\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ gut ist. In natürlicher Verallgemeinerung unseres bisherigen Ansatzes wird man also den Spannungstensor gleich

$$l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| (\nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \nabla)^{1)}$$

setzen. Die Spannungen, die man hiernach neu hinzufügen muß, sind im allgemeinen zu vernachlässigen, nur nicht $\sigma_y = 2\, l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\sigma_t = 2\, l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot \frac{v}{y}$, die bei der Berechnung der Druckunterschiede eingehen. Bei dem zahlenmäßig durchgerechneten Beispiel fällt dieser Anteil im ebenen Fall wegen der verwandten Grenzen weg, nicht so im rotationssymmetrischen Fall. Die Druckunterschiede vergrößern sich hier um das Integral

$$\int_0^y \frac{\sigma_y - \sigma_t}{y}\, d\,y,$$

so daß man erhält

$$p_m - p_r = +\,0{,}151\,(c^2)^{2/3}\,\varrho\, U_m^2\,(x) = +\,0{,}0012\,\frac{\varrho\, U_m^2\,(x)}{2}$$

bzw.

$$p_m - p_0 = 0{,}095\,(c^2)^{2/3}\,\varrho\, U_m^2\,(x) = 0{,}00075\,\frac{\varrho\, U_m^2\,(x)}{2},$$

also Ueberdruck im Innern des Strahles, wie in den anderen Fällen.

Meinem verehrten Lehrer, Hrn. Professor Prandtl, verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit und vielfachen Rat bei ihrer Fertigstellung. 675

Das Gleichgewichtsprofil einer Standseilbahn.

Von ERWIN KRUPPA in Wien.

Das Gleichgewichtsprofil der Standseilbahnen wurde wiederholt zum Gegenstand theoretischer Untersuchungen gemacht. Trotzdem fehlt eine zugleich umfassende und mathematisch einwandfreie Behandlung dieses Problems. Während der Fall ungleicher Wagengewichte hinreichend klargestellt ist[2]), müssen die auf den Fall gleicher Wagengewichte vorhandenen Ansätze[3]) teils als unvollständig, teils als mißlungen bezeichnet werden. Da im folgenden der mathematische Gesichtspunkt im Vordergrund steht, genügt die Annahme eines Motorbetriebes ohne Gegenseil. Es wird also angenommen, daß die beiden Wagen an den Enden eines Seiles hängen, das mittels Rollen längs der Fahrbahn geführt und durch ein gewöhnlich in der oberen Station befindliches Windwerk mit Motorkraft angetrieben wird.

I. Das Gleichgewichtsprofil für ungleiche Wagengewichte. Es seien P_1, P_2 die Gewichte der beiden Wagen, p das Gewicht der Längeneinheit des Seiles, K die

[1]) $\nabla \mathfrak{v}$ = Affinor von $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v} \nabla$ ist der konjugierte Affinor.

[2]) R. Reckenschuß, Der theoretische Längenschnitt von Drahtseilbahnen mit Doppelbetrieb, Organ f. d. Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1913, Heft 21 bis 24, auch Verlag Kreidel, Wiesbaden, 1914.

[3]) H. Peter, Das Gleichgewichtsprofil der Seilbahn, Schweizerische Bauzeitung, Bd. 83 (1924), S. 58. C. Meißner, Bestimmung des Profils usw., Schweizerische Bauzeitung, Bd. 54 (1909), S. 96.

konstant vorausgesetzte Motorkraft, W der konstant angenommene Gesamtwiderstand. Für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen führen wir die folgenden Veränderlichen ein: h den jeweiligen Höhenunterschied der beiden Wagen; α, die Horizontalneigung der unteren Hälfte der Fahrbahn, β, die der oberen. Befindet sich bei einer Bergfahrt von P_1 dieser Wagen an einer Stelle $A(\alpha)$ der unteren Fahrbahnhälfte, so wird sich P_2 an einer bestimmten Stelle B (β), der korrespondierenden Stelle der oberen Hälfte befinden; gelangt P_2 nach A, so befindet sich P_1 in B. Für korrespondierende Stellen (A, B) gelten somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

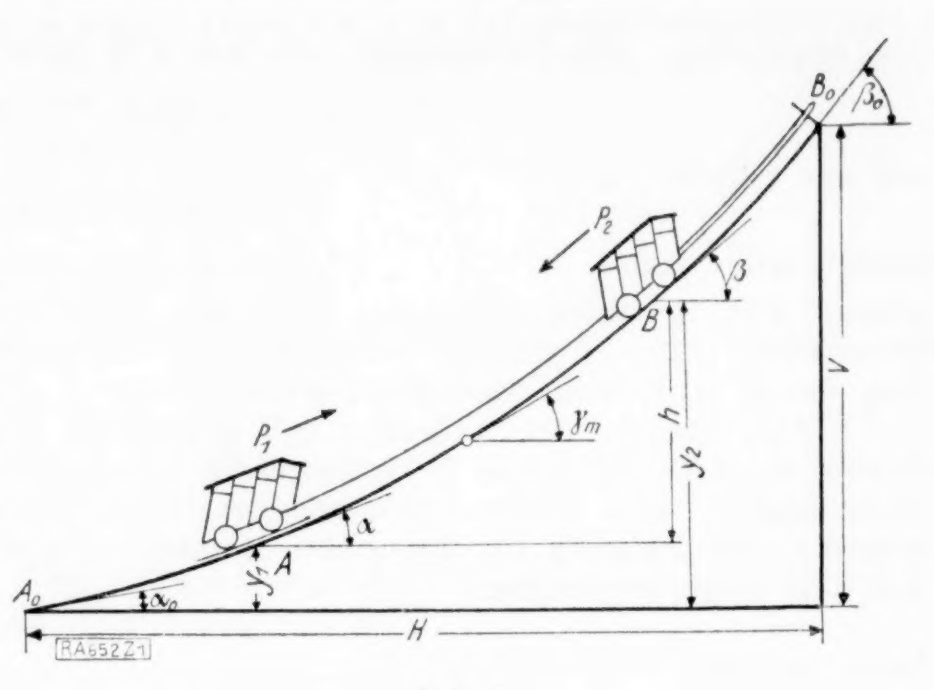


Abb. 1.

$$P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta + p\,h = K - W, \qquad P_1 \sin\beta - P_2 \sin\alpha - p\,h = K - W \quad (1).$$

Durch Addition und Subtraktion folgt aus (1)

$$(P_1 - P_2)(\sin\beta + \sin\alpha) = 2\,(K - W) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_1),$$

$$(P_1 + P_2)(\sin\beta - \sin\alpha) = 2\,p\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_2).$$

Setzt man

$$a = \frac{K - W}{P_1 - P_2}, \qquad b = \frac{p}{P_1 + P_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

so lautet (2)

$$\sin\beta + \sin\alpha = 2\,a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4_1)$$

$$\sin\beta - \sin\alpha = 2\,b\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4_2).$$

Aus (2_1) folgt, daß entweder die Ungleichungen

$$P_1 \neq P_2, \qquad K \neq W \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_1)$$

oder die Gleichungen

$$P_1 = P_2, \qquad K = W \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_2)$$

zusammenbestehen.

Wir betrachten zunächst den Fall (5_1) ungleicher Wagenlasten $P_1 \neq P_2$. Während eines Zeitelementes hebt sich P_1 um $d\,y = \sin\alpha\,d\,s$, während sich P_2 um $d\,y = -\sin\beta\,d\,s$ senkt; somit ist

$$d\,h = -(\sin\alpha + \sin\beta)\,d\,s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Anderseits folgt aus (4)

$$\sin\alpha = a - b\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7_1)$$

$$\sin\beta = a + b\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7_2)$$

und aus (7_1) durch Differentiation

$$d\,h = -\frac{\cos\alpha\,d\,\alpha}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Durch Gleichsetzen von (6) und (8) ergibt sich mittels (4_1)

$$2\,a\,b\,d\,s = \cos\alpha\,d\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Aus (9) folgt für eine lotrechte y-Achse

$$d\,y = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{2\,a\,b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

und daraus durch Integration und nach (3), wenn man noch

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{4\,p\,(K - W)} = 2\,\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

setzt,

$$y = 2\,\varrho\,\sin^2\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Die Abszissen x der Bahnpunkte ergeben sich unmittelbar aus der trivialen Beziehung

$$d x = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \frac{d y}{d \alpha} \cdot d \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13),$$

aus der mittels (12)

$$d x = 4 \varrho \cos^2 \alpha \, d \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

folgt, woraus man

$$x = 2 \varrho (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

erhält. Für die obere Hälfte der Fahrbahn ergibt sich ebenso, indem man (7_2) statt (7_1) benutzt und $d y = - \sin \beta \, d s$ setzt, dieselbe Bahnkurve (12), (15), also eine **Zykloide** mit dem durch (11) bestimmten Rollkreishalbmesser ϱ, ein bekanntes Resultat.

Zur Lösung der Aufgabe, bei gegebenen Werten P_1, P_2, p das zwei gegebene Punkte A_0, B_0 verbindende Zykloidenprofil zu ermitteln, benötigen wir noch einige weitere Beziehungen. Der Horizontalabstand der beiden Stationen A_0, B_0 sei H, ihr Höhenunterschied V, die Neigung der Fahrbahn daselbst α_0 bzw. β_0.
Aus (12) folgt unmittelbar

$$V = 2 \varrho (\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \alpha_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Nach (2_2) und (16) ist

$$\sin \beta_0 - \sin \alpha_0 = \frac{2 p V}{P_1 + P_2} \quad \ldots \quad (17_1), \qquad \sin \beta_0 + \sin \alpha_0 = \frac{P_1 + P_2}{4 p \varrho} \quad \ldots \quad (17_2)$$

und daraus

$$\sin \alpha_0 = \frac{P_1 + P_2}{8 p \varrho} - \frac{p V}{P_1 + P_2} \quad \ldots \quad (18_1), \qquad \sin \beta_0 = \frac{P_1 + P_2}{8 p \varrho} + \frac{p V}{P_1 + P_2} \quad \ldots \quad (18_2).$$

Für die Gesamtlänge L des Seiles folgt aus (17_1), (9), (3) und (11)

$$L = \frac{8 \varrho p V}{P_1 + P_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19),$$

wodurch ($18_{1,2}$) übergeht in

$$\sin \alpha_0 = \frac{P_1 + P_2 - L p}{8 \varrho p} \quad \ldots \quad (20_1), \qquad \sin \beta_0 = \frac{P_1 + P_2 + L p}{8 \varrho p} \quad \ldots \quad (20_2).$$

Der gegebene Horizontalabstand H der beiden Stationen A_0, B_0 ist nach (15)

$$H = 2 \varrho [\beta_0 - \alpha_0 + \sin \beta_0 \cos \beta_0 - \sin \alpha \sin \alpha_0] \quad \ldots \quad (21).$$

Mittels (19), (20), (21) kann der Rollkreishalbmesser ϱ durch eine einfache Näherungsrechnung gefunden werden. Man setze in (19) für L einen durch Schätzung erhaltenen Wert L_1 (etwas größer als $\sqrt{H^2 + V^2}$) und rechne daraus $\varrho = \varrho_1$; damit können nach ($20_{1,2}$) die zugehörigen Näherungswerte von α_0 und β_0 berechnet werden. Führt man sie in (21) ein, so wird man einen vom gegebenen H i. a. etwas abweichenden Wert H_1 erhalten. Verschafft man sich ebenso ein solches von ϱ_1 nicht stark abweichendes ϱ_2, daß H zwischen H_1 und dem zu ϱ_2 gehörigen H_2 liegt, so wird man durch lineare Interpolation einen meist befriedigenden Näherungswert

$$\varrho = \varrho_1 + \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{H_2 - H_1} (H - H_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

erhalten, der durch Wiederholung des Verfahrens beliebig verbessert werden kann.

Zur Vollständigkeit seien noch folgende Beziehungen erwähnt:

$$K = W + \frac{P_1^2 - P_2^2}{8 p \varrho} = W + \frac{(P_1 - P_2) V}{L}, \text{ [nach (3), (4}_1\text{), (17}_2\text{), (19)]} \quad \ldots \quad (23).$$

Für die Ausweichstelle $\alpha = \beta = \gamma_m$ in der Bahnmitte gilt nach (2) und (11)

$$\sin \gamma_m = \frac{K - W}{P_1 - P_2} = \frac{P_1 + P_2}{8 \varrho p} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24),$$

woraus noch

$$P_1 = 4 \varrho p \sin \gamma_m + \frac{K - W}{2 \sin \gamma_m} \quad \ldots \quad (25_1), \qquad P_2 = 4 \varrho p \sin \gamma_m - \frac{K - W}{2 \sin \gamma_m} \quad \ldots \quad (25_2)$$

folgen. Aus (24) und ($18_{1,2}$) ergibt sich schließlich

$$\sin \alpha_0 = \sin \gamma_m - \frac{p V}{P_1 + P_2} \quad \ldots \quad (26_1), \qquad \sin \beta_0 = \sin \gamma_m + \frac{p V}{P_1 + P_2} \quad \ldots \quad (26_2).$$

II. Eine allgemeine Theorie des Gleichgewichtsprofils. Das Problem des Gleichgewichtsprofils wird mathematisch interessanter, wenn man die Voraussetzung $P_1 \neq P_2$ fallen läßt. Das soll aber nicht heißen, daß jetzt von vornherein $P_1 = P_2$ gesetzt wird,

vielmehr soll ein Verfahren gezeigt werden, durch das alle Gleichgewichtsprofile systematisch gewonnen werden können. Dann dürfen (2_1) und (4_1) wegen der Möglichkeit $P_1 = P_2$ nicht herangezogen werden. Schreibt man (4_2) als

$$\sin\beta - \sin\alpha = 2\,b\,(y_2 - y_1) \quad \ldots \ldots \quad (27),$$

so können wir demnach als Gleichung der Bahnkurve

$$y = \frac{1}{2\,b}\sin\gamma + f(\gamma) \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

ansetzen, worin $f(\gamma)$ eine noch unbestimmte Funktion[1]) bedeutet, die aber wegen (27) jedenfalls der Bedingung

$$f(\alpha) = f(\beta) \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

für alle korrespondierenden Werte α, β genügen muß.

Aus (13) und (28) folgt

$$d\,x = \left[\frac{\cos\gamma}{2\,b} + f'(\gamma)\right]\operatorname{cotg}\gamma\,d\,\gamma \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

und daraus

$$x = \frac{1}{2\,b}\left(\cos\gamma + \ln\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) + \int f'(\gamma)\operatorname{cotg}\gamma\,d\,\gamma \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

Aus (28) folgt für $\gamma \neq 0$

$$d\,s = \left[\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{2\,b} + \frac{f'(\gamma)}{\sin\gamma}\right]d\,\gamma \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

und daraus, weil je zwei korrespondierende Punkte (α, β) der Bahn von der Ausweichstelle γ_m gleiche Bogenentfernung haben,

$$\frac{1}{2\,b}\int_\alpha^{\gamma_m}\operatorname{cotg}\gamma\,d\,\gamma + \int_\alpha^{\gamma_m}\frac{f'(\gamma)}{\sin\gamma}\,d\,\gamma = \frac{1}{2\,b}\int_{\gamma_m}^{\beta}\operatorname{cotg}\gamma\,d\,\gamma + \int_{\gamma_m}^{\beta}\frac{f'(\gamma)}{\sin\gamma}\,d\,\gamma \quad \ldots \quad (33).$$

Differentiert man (33) nach α, was natürlich voraussetzt, daß α variabel ist, also die untere Bahnhälfte gekrümmt ist, so kommt

$$\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{2\,b} + \frac{f'(\alpha)}{\sin\alpha} + \left(\frac{\operatorname{cotg}\beta}{2\,b} + \frac{f'(\beta)}{\sin\beta}\right)\frac{d\,\beta}{d\,\alpha} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Andererseits gilt nach (29)

$$f'(\beta) = f'(\alpha)\frac{d\,\alpha}{d\,\beta} \quad \ldots \ldots \quad (35),$$

wodurch (34) in die für das Folgende fundamentale Differentialgleichung

$$\frac{d\sin\beta}{d\,\alpha} + \frac{2\,b\,f'(\alpha) + \cos\alpha}{\sin\alpha}\sin\beta + 2\,b\,f'(\alpha) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

übergeht. Sie ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen $\sin\beta$ als abhängiger und α als unabhängiger Veränderlicher.

Bezeichnet man die rechte Seite von (28) mit $F(\gamma)$, wodurch die Bahnkurve nach (13) die Parameterdarstellung

$$y = F(\gamma)\,; \qquad x = \int F'(\gamma)\operatorname{cotg}\gamma\,d\,\gamma \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

erhält, so geht unsere Differentialgleichung (36) über in

$$\frac{d\sin\beta}{d\,\alpha} + 2\,b\,\frac{F'(\alpha)}{\sin\alpha}\sin\beta + 2\,b\,F'(\alpha) - \cos\alpha = 0 \quad \ldots \quad (39)$$

und hat mithin das allgemeine Integral

$$\sin\beta = e^{-2\,b\int\frac{F'(\alpha)}{\sin\alpha}d\,\alpha}\left\{C + \int\left[\cos\alpha - 2\,b\,F'(\alpha)\right]e^{2\,b\int\frac{F'(\alpha)}{\sin\alpha}d\,\alpha}\,d\,\alpha\right\} \quad . \quad (40).$$

---

[1]) Hr. Ing. H. H. Peter schließt (a. a. O. sowie in einem von ihm herrührenden Abschnitt in E. Seefehlner, Elektrische Zugförderung, Berlin 1924, 2. Aufl. S. 580) aus (27) einfach $2\,b\,y = \sin\gamma$, woraus er natürlich die Traktrix als Gleichgewichtsprofil erhält. Diese Schlußfolgerung, die er übrigens auch im Fall $P_1 \neq P_2$ macht, ist aber unzulässig. Ich verdanke den Hinweis auf diesen Mangel meinem Kollegen Prof. Ing. R. Findeis.

Da (33) und (29) in α und β symmetrisch sind, gelten auch die aus (36) und (39) durch Vertauschung von α und β hervorgehenden Gleichungen

$$\frac{d \sin \alpha}{d \beta} + \frac{2 b f'(\beta) + \cos \beta}{\sin \beta} \sin \alpha + 2 b f'(\beta) = 0 \quad \ldots \quad (36^*),$$

$$\frac{d \sin \alpha}{d \beta} + 2 b \frac{F'(\beta)}{\sin \beta} \sin \alpha + 2 b F'(\beta) - \cos \beta = 0 \quad \ldots \quad (39^*).$$

Nun können alle Sonderfälle in einheitlicher Weise hergeleitet werden.

A) Es sei $P_1 \neq P_2$, dann gilt auch (4_1), wodurch nach (39)

$$2 a b F''(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha \quad \ldots \quad (41)$$

entsteht. Nach (38), [(3), (11), (36*)] erhält man daraus wieder die unter (I) ermittelte Zykloidenbahn (12), (15).

B) Nun sei $P_1 = P_2 = P$. Dann muß nach (2_1) auch $K = W$ sein, und diese Gleichgewichtsbedingung ist mithin für einen beliebigen funktionalen Zusammenhang (28) zwischen α und β erfüllt. Aus diesem Grund läßt das Problem im vorliegenden Fall unendlich viele Lösungen zu. Wir können dieselben in zwei Gattungen einteilen: a) die Bahnkurve gehört einer und derselben analytischen Kurve an, b) die beiden Bahnhälften gehören zwei analytisch nicht zusammenhängenden Kurven an, von denen die eine sogar willkürlich (auch graphisch) angenommen werden kann.

Zu a). Die in diese Gattung fallenden Lösungen erhält man aus (36), (36*) bzw. (39), (39*), indem man eine in α und β symmetrische Abhängigkeit zwischen diesen beiden Veränderlichen festsetzt. Um wieder Zykloidenprofile zu erhalten, hat man nach dem Vorangehenden [entsprechend (2_1)] einfach zu setzen

$$\sin \alpha + \sin \beta = \text{konst.} = 2 \sin \gamma_m \quad \ldots \quad (42),$$

woraus man auf dem eben angegebenen Weg die Zykloide

$$y = \frac{P}{2 p \sin \gamma_m} \sin^2 \gamma, \qquad x = \frac{P}{2 p \sin \gamma_m} (\gamma + \sin \gamma \cos \gamma) \quad \ldots \quad (43)$$

erhält.

Wählt man statt (42) die Beziehung

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin^2 \gamma_m \quad \ldots \quad (44),$$

so folgt aus (36)

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \text{ (konst.)}$$

also nach (28), (31), (3) als Bahnkurve die Traktrix (s. Anm. S. 481)

$$y = \frac{P}{p} \sin \gamma; \qquad x = \frac{P}{p} \left(\cos \gamma + \ln \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \quad \ldots \quad (45).$$

Zu b). Ist etwa $f(\alpha)$ und damit die untere Bahnhälfte gegeben ($\alpha \neq$ konst.), so lassen sich nach (28), (31), (3), (29) und (35) die Koordinaten der Bahnpunkte B durch die Werte α ihrer korrespondierenden Punkte A wie folgt ausdrücken:

$$y = \frac{P}{p} \sin \beta(\alpha) + f(\alpha) \quad \ldots \quad (46_1),$$

$$x = \frac{P}{p} \left[\cos \beta(\alpha) + \ln \operatorname{tg} \frac{\beta(\alpha)}{2} \right] + \int f'(\alpha) \operatorname{cotg} \beta(\alpha)\, d\alpha \quad \ldots \quad (46_2),$$

worin $\beta(\alpha)$ bedeutet, daß β gemäß dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung (36) durch α auszudrücken ist. Die darin auftretende Integrationskonstante ist so zu bestimmen, daß an der Ausweichstelle $\alpha = \beta = \gamma_m$ gilt.

Besonders einfach ist der Fall, daß die obere (untere) Bahnhälfte geradlinig (aber nicht horizontal) angenommen wird. Dann wird aus (39) wegen $\beta = \gamma_m =$ konst.

$$F'(\alpha) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 b (\sin \alpha + \sin \gamma_m)} \quad \ldots \quad (47).$$

Daraus findet man nach (38) die untere Bahnhälfte als

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P}{p} \left[\sin \alpha - \sin \gamma_m \left(\ln \sin \frac{\alpha + \gamma_m}{2} + \ln \cos \frac{\alpha - \gamma_m}{2} \right) \right] \\ x &= \frac{P}{p} \left[\alpha \sin \gamma_m + \cos \alpha + \cos \gamma_m \left(\ln \sin \frac{\alpha + \gamma_m}{2} - \ln \cos \frac{\alpha - \gamma_m}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad . \quad (48).$$

Als Ausweichstelle ist der Punkt von (48) zu nehmen, in dem die Horizontalneigung γ_m beträgt, denn gemäß (4_2) muß für $h = 0$, $\alpha = \beta = \gamma_m$ gelten. Das so ermittelte Profil ist also ein technisch mögliches. Ist die untere Bahnhälfte geradlinig, aber nicht horizontal angenommen, $\alpha = \gamma_m$, so kommt man mittels (39*) zu derselben Kurve (48). Sie hat für das Intervall $0 \leq \alpha \leq \pi$ zykloidenähnliche Gestalt, für $\alpha = 0, \pi$ tiefste Punkte, für $\alpha = \pi/2$ eine Spitze; die den Intervallhälften $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ und $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ entsprechenden Bögen sind symmetrisch.

Wird die untere Bahnhälfte kreisförmig mit dem Halbmesser r angenommen, so ist

$$y = -r\cos\alpha = F(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

und somit nach (40) und (3)

$$\sin\beta = \frac{C}{e^{\frac{p\,r}{P}\alpha}} + \frac{(P^2 + p^2 r^2)\sin\alpha + 2\,P\,p\,r\cos\alpha}{P^2 + p^2 r^2} \quad \ldots\ldots \quad (50).$$

Für eine gegebene Neigung γ_m der Ausweichstelle ergibt sich daraus der Wert der Integrationskonstanten

$$C = e^{\frac{p\,r\,\alpha}{P}} \, \frac{2\,p\,r\,(p\,r\sin\gamma_m - P\cos\gamma_m)}{P^2 + p^2 r^2} \quad \ldots\ldots \quad (51).$$

($46_{1,2}$) gibt dann mittels (50), (51) und (28) eine Parameterdarstellung der oberen Bahnhälfte. Da (46_2) der Berechnung erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellt, empfiehlt sich das folgende numerisch-graphische Verfahren. Nimmt man auf dem gegebenen Kreisprofil einen Punkt $A(\alpha)$ an, so kann man nach (50) und (51) die korrespondierende Neigung β berechnen und damit nach (2_2) den Höhenunterschied h zwischen A und dem korrespondierenden Punkt B angeben. B liegt also auf einer leicht bestimmbaren Horizontalen $h(\alpha)$, die in B von der Bahnkurve unter dem berechneten Winkel $\beta(\alpha)$ (Abb. 2) geschnitten wird. Wandert A auf dem Kreisprofil, so entsteht ein Richtungsfeld mit horizontalen Isoklinen $h(\alpha)$, wenn man allen Punkten einer Horizontalen $h(\alpha)$ die entsprechende Richtung $\beta(\alpha)$ zuordnet. Dieses Richtungsfeld, dem die gesuchte Bahnkurve als Integralkurve angehört, ist somit das einer Differentialgleichung von der Form

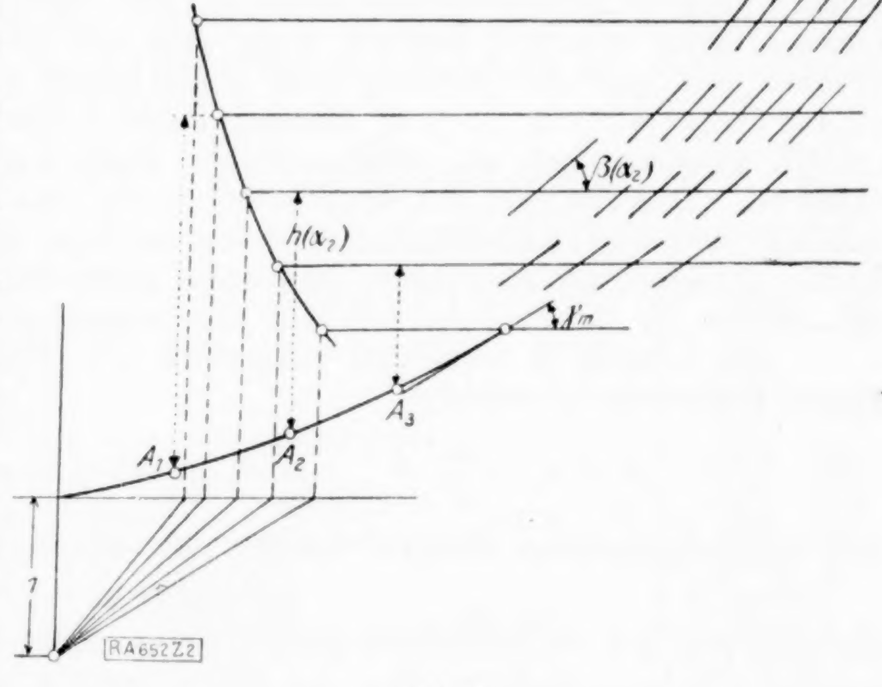


Abb. 2.

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \varphi(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52).$$

Da aber

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \operatorname{cotg}\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

ist, entsteht die obere Bahnhälfte durch (graphische) Integration der leicht zu zeichnenden Funktion $x = \varphi(y)$ mit der Parameterdarstellung

$$x = \operatorname{cotg}\beta(\alpha), \qquad y = y(\alpha) + h(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (54).$$

worin $y(\alpha)$ die zur Steigung α gehörige Ordinate der gegebenen unteren Bahnhälfte bedeutet.

Damit ist auch der Weg gegeben, der zu gehen ist, wenn eine Bahnhälfte (etwa die untere) graphisch gegeben ist. Man verschafft sich numerisch-graphisch das der Anfangsbedingung (γ_m, $\sin\gamma_m$) genügende Integral $\sin\beta$ unserer Differentialgleichung (36) oder (39), und geht im übrigen wie zuletzt vor. 652

Kreisplatte mit Rippenstern.

Von **M. SCHILHANSL** in München.

Das Prinzip, welches der Untersuchungsmethode von elastischen, mehrfach gelagerten Stäben zugrunde liegt, läßt sich auch für die Berechnung von Kreis- und Ringplatten mit Rippenstern verwenden. Man denke sich zunächst die Rippen entfernt; die Lösung für die elastische Fläche der irgendwie belasteten Platte ohne Rippen sei w_0. Ferner suche ich eine Lösung w für dieselbe Platte ohne Rippen, die jedoch statt der ursprünglichen Belastung nur eine Linienbelastung längs der Radien, auf denen die Rippen saßen, trägt. Bestimme ich diese Linienbelastung als Funktion des Halbmessers derart, daß bei der Ueberlagerung von w_0 und w längs dieser Radien die Einsenkung zu Null wird, was der Annahme vollkommen starrer Rippen entspricht, oder bei nachgiebigen Rippen gleich der Durchbiegung derselben wird, so ist die Summe $w_0 + w$ die gesuchte Lösung.

Die Belastung beim Deformationszustand w setze ich in folgender Form an:

$$p_0 \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} A_n \cos n\,k\,\varphi\, a_m\, r^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Darin bedeutet p_0 eine Konstante, a_m Freiwerte, die im weiteren Verlauf der Rechnung ebenso wie p_0 bestimmt werden können, k die Zahl der Rippen $\left(= \frac{\pi}{\varphi_0}\right.$, wenn $2\,\varphi_0$ der Zentriwinkel zwischen zwei benachbarten Rippen ist$\left.\right)$ und $r\,\varphi$ das der Untersuchung zugrunde gelegte Polarkoordinatensystem. Die Festwerte A_n können mit Hilfe der harmonischen Analyse ermittelt werden, wenn man die Belastung nicht auf »Linien« konzentriert, sondern auf schmale Sektoren vom Zentriwinkel $2\,\beta$, die durch den Halbmesser φ_0 bzw. $\varphi_0 + 2\,i\,\varphi_0$ $(i = 1, 2, 3 \ldots k)$ halbiert werden, irgendwie verteilt annimmt. Sie sind gleich $(-1)^n$, ausgenommen A_0, welches zu $^1/_2$ wird, wenn die Belastung auf eine Linie konzentriert ist. Der Hinweis auf das Verhalten der von A. Föppl untersuchten Kreisplatte mit exzentrischer Einzellast (Sitzungsberichte der Bayr. Akademie der Wissenschaften 4. Mai 1912) dürfte genügen um zu zeigen, daß dabei trotz des Unendlichwerdens der Belastung längs der Radien φ_0 bzw. $\varphi_0 + 2\,i\,\varphi_0$ die Einsenkung auf denselben endlich bleibt.

Die Lösung w setzt sich zusammen aus dem Partikulärintegral w_p der nicht homogenen Differentialgleichung

$$\Delta\,\Delta\,w_p = \frac{p_0}{N} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} A_n \cos n\,k\,\varphi\, a_m\, r^m \quad (N = \text{Plattensteifigkeit}) \quad . \quad . \quad (2)$$

und dem allgemeinen Integral w_a der homogenen Differentialgleichung

$$\Delta\,\Delta\,w_a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Zur Bildung des Partikulärintegrales dienen Ausdrücke von der Form

$$w_{p\,m\,n} = \frac{r^{m+4} \cos n\,k\,\varphi}{[(m+2)^2 - (n\,k)^2]\,[(m+4)^2 - (n\,k)^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

was durch zweimalige Ausführung der Laplaceschen Operation nachgewiesen werden kann. Glieder dieser Form werden unbrauchbar für

$$m + 2 = \pm\, n\,k\,, \qquad m + 4 = \pm\, n\,k.$$

Im ersten Fall ist zu setzen:

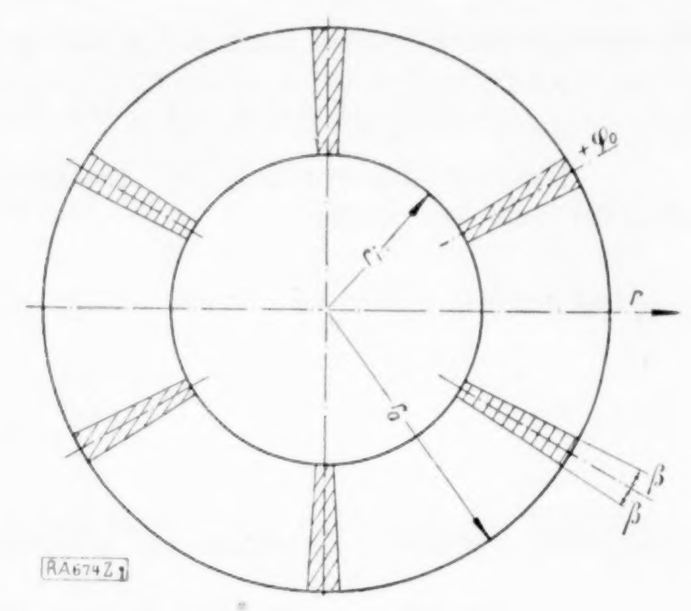
$$w_{p\,(n\,k-2)\,n} = \frac{r^{n\,k+2} \log r \cos n\,k\,\varphi}{8\,n\,k\,(1 + n\,k)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

im zweiten Falle dagegen:

$$w_{p\,(n\,k)\,n} = \frac{r^{n\,k} \log r \cos n\,k\,\varphi}{8\,n\,k\,(1 - n\,k)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Glieder von der Form 6 werden für $n\,k = 1$ unbrauchbar. Dies tritt nur bei einer Platte mit einer, vom Plattenmittelpunkt bis zum Außenrand reichenden Rippe ein. Dieser Fall dürfte praktisch wohl kaum vorkommen. Immerhin kann von ihm ausgesagt werden, daß eine Einzelkraft in der Plattenmitte, also am inneren Ende der einzigen Rippe, auftreten wird und deshalb der Ansatz 1 durch Summanden mit $\log r$ und $(1/r)^m$ ergänzt werden muß, wodurch bekanntlich ein Unendlichwerden der Belastung an der Stelle $r = 0$ erreicht wird. Wir wollen jedoch diesen Sonderfall nicht näher betrachten.

Unter der Voraussetzung, daß k gerade ist, können wir uns bei der schließlichen numerischen Auswertung viel Rechenarbeit ersparen, wenn wir in dem Ansatz 1 nur Glieder mit ungeradem m berücksichtigen, weil dann die Partikulärintegrale $w_{p(nk)n}$ und $w_{p(nk-2)n}$ fortfallen. Darin liegt natürlich eine gewisse Willkür, die aber zulässig erscheint, weil durch die Potenzreihe auch ohne Hinzufügung der auf Ausdrücke von der Form 5 und 6 führenden Summanden jede beliebige Verteilung der Belastung über den Halbmesser erreicht werden kann, wenn man nur genügend viele Glieder der Potenzreihe nimmt. Mit dieser Beschränkung erhalten wir



$$w_p = \frac{p_0}{N} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a_m r^{m+4} A_n \cos n k \varphi}{[(m+2)^2 - (n k)^2]\,[(m+4)^2 - (n k)^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Das allgemeine Integral lautet:

$$w_a = c_{1o} + c_{2o} \log r + c_{3o} r^2 + c_{4o} r^2 \log r + \sum_{n=1}^{n=\infty} (c_{1n} r^{nk} + c_{2n} r^{-nk}$$
$$+ c_{3n} r^{nk+2} + c_{4n} r^{-nk+2}) \cos n k \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Vermöge der Freiwerte c_{mn} kann den Bedingungen auf dem Außenrand $r = r_a$ und auf dem Innenrand $r = r_i$ genügt werden. Für die Kreisplatte $(r_i = 0)$ werden c_{2o}, c_{4o}, c_{2n} und c_{4n} zu Null. An dem Beispiel einer eingespannten Kreisplatte sei die Berechnung der übrigen Freiwerte gezeigt. Am Außenrand $r = r_a$ muß

$$(w_p + w_a)_{r=r_a} = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial w_p}{\partial r} + \frac{\partial w_a}{\partial r}\right)_{r=r_a} = 0$$

sein. Dies ist der Fall, wenn

$$\left.\begin{aligned}
c_{1o} &= A_o \frac{p_0}{2N} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a_m r_a^{m+4}}{(m+2)(m+4)^2} \\
c_{3o} &= - A_o \frac{p_0}{2N} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a_m r_a^{m+2}}{(m+2)^2 (m+4)} \\
c_{1n} &= A_n \frac{p_0}{2N} r_a^{-nk+2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(m+4) - (nk+2)}{[(m+2)^2 - (nk)^2]\,[(m+4)^2 - (nk)^2]} a_m \cdot r_a^{m+2} \\
c_{3n} &= - A_n \frac{p_0}{2N} r_a^{-nk} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(m+4) - nk}{[(m+2)^2 - (nk)^2]\,[(m+4)^2 - (nk)^2]} a_m r_a^{m+2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9).$$

Nachdem die Freiwerte c_{mn} in Abhängigkeit von den Koeffizienten a_m gebracht sind, fehlt nur noch die Ermittlung der a_m. Unter der Voraussetzung vollkommen starrer Rippen muß auf den Radien $\varphi = \varphi_0$ bzw. $\varphi = \varphi_0 + 2\,i\,\varphi_0$ die Einsenkung

$$w_{\varphi=\varphi_0} + w_0 = 0$$

sein. Aus dieser Bedingung gewinnen wir ein System von Gleichungen, indem wir $w_{\varphi=\varphi_0}$ und w_0 mit $\sin q \pi \frac{r - r_i}{r_a - r_i} d r$ multiplizieren und zwischen den Grenzen r_i und r_a integrieren; dabei müssen wir q alle Werte von 0 bis Unendlich, wenn wir unendlich viele Koeffizienten a_m berechnen wollen, oder von 1 bis q durchlaufen lassen, wenn wir die Potenzreihe beim Glied a_q abbrechen wollen.

Es ist also:

$$\int_{r_i}^{r_a} w_{\varphi=\varphi_0} \sin q \pi \frac{r - r_i}{r_a - r_i} d r = - \int_{r_i}^{r_a} w_0 \sin q \pi \frac{r - r_i}{r_a - r_i} d r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Nehmen wir bei dem oben gewählten Beispiel der eingespannten Kreisplatte eine gleichmäßige Flächenlast p an, so ist

$$w_0 = \frac{p}{64\,N} (r_a^2 - r^2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11);$$

dementsprechend steht auf der rechten Seite der Gl. (10):

$$\frac{r_a^3}{q\pi}\left[1-\left(\frac{2}{q\pi}\right)^2+3\left(\frac{2}{q\pi}\right)^4\right] \text{ für ungerade } q; \quad \frac{r_a^3}{q\pi}\left[1+3\left(\frac{2}{q\pi}\right)^2\right] \text{ für gerade } q \qquad (12).$$

Bei der Auswertung der Integrale auf der linken Seite von Gl. (10) müssen Ausdrücke von der Form

$$\int_{r_i}^{r_a} \log r \sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i}\, dr \quad \ldots\ldots (13), \qquad \int_{r_i}^{r_a} r^t \sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i}\, dr \quad \ldots\ldots (14),$$

$$\int_{r_i}^{r_a} r^{-t} \sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i}\, dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

integriert werden. Zunächst ist allgemein:

$$\sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i} = \cos q\pi \frac{r_i}{r_a-r_i} \sin q\pi \frac{r}{r_a-r_i} - \sin q\pi \frac{r_i}{r_a-r_i} \cos q\pi \frac{r}{r_a-r_i}.$$

Es treten also beim Ausdruck (13) Integrale von der Form

$$\int_{r_i}^{r_a} \log r \sin q\pi \frac{r}{r_a-r_i}\, dr \quad \ldots\ldots (16) \quad \text{und} \quad \int_{r_i}^{r_a} \log r \cos q\pi \frac{r}{r_a-r_i}\, dr \quad \ldots (17)$$

auf. Durch partielle Integration erhält man aus (16)

$$-\left(\frac{r_a-r_i}{q\pi} \log r \cos q\pi \frac{r}{r_a-r_i}\right)_{r_i}^{r_a} + \frac{r_a-r_i}{q\pi}\int_{r_i}^{r_a} \cos q\pi \frac{r}{r_a-r_i} \frac{dr}{r} \quad \ldots (18).$$

Durch die Substitution

$$u = \frac{q\pi r}{r_a-r_i}; \qquad u_1 = \frac{q\pi r_a}{r_a-r_i}; \qquad u_2 = \frac{q\pi r_i}{r_a-r_i}$$

geht der zweite Summand im Ausdruck (18) über in:

$$\frac{r_a-r_i}{q\pi}\int_{u_2}^{u_1} \frac{\cos u}{u}\, du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Nun ist:

$$\int_{u_2}^{u_1} \frac{\cos u}{u}\, du = \int_{u_2}^{\infty} \frac{\cos u}{u}\, du - \int_{u_1}^{\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = Ci\, u_1 - Ci\, u_2 .$$

Analog wird man bei dem Ausdruck (17) auf den Integralsinus geführt. Schließlich erhält man für den Ausdruck (13)

$$\frac{r_a-r_i}{q\pi}\Big[\log r_i - (-1)^q \log r_a + \cos q\pi \frac{r_i}{r_a-r_i}(Ci\, u_1 - Ci\, u_2)$$
$$+ \sin q\pi \frac{r_i}{r_a-r_i}(Si\, u_1 - Si\, u_2)\Big] \quad \ldots (20).$$

Der Ausdruck (14) geht über in:

$$\frac{r_a-r_i}{q\pi}\Big[-r^t \cos q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i} + t\frac{r_a-r_i}{q\pi} r^{t-1} \sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i}$$
$$+ t(t-1)\left(\frac{r_a-r_i}{q\pi}\right)^2 r^{t-2} \cos q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i} - t(t-1)(t-2)\left(\frac{r_a-r_i}{q\pi}\right)^3 r^{t-3} \sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i}$$
$$- t(t-1)(t-2)(t-3)\left(\frac{r_a-r_i}{q\pi}\right)^4 r^{t-4} \cos q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i} + + - - \ldots\Big]_{r_i}^{r_a} \quad . \ (21).$$

Für den Ausdruck (15) findet man schließlich:

$$\Big[-\frac{1}{t-1} r^{-t+1} \sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i} - \frac{q\pi}{r_a-r_i}\frac{1}{t-1}\frac{1}{t-2} r^{-t+2} \cos q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i}$$
$$+\left(\frac{q\pi}{r_a-r_i}\right)^2 \frac{1}{t-1}\frac{1}{t-2}\frac{1}{t-3} r^{-t+3} \sin q\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i} + - - + + \ldots\Big]_{r_i}^{r_a}$$
$$-(-1)^{t/2}\left(\frac{q\pi}{r_a-r_i}\right)^{t-1}\frac{1}{(t-1)!}\Big[\cos q\pi \frac{r_i}{r_a-r_i}(Ci\, u_1 - Ci\, u_2)$$
$$+ \sin q\pi \frac{r_i}{r_a-r_i}(Si\, u_1 - Si\, u_2)\Big] \quad \ldots (22).$$

Die Zahlenwerte des Integralsinus und Integralcosinus sind in den Funktionentafeln von E. Janke und F. Emde (Teubner S. 21) mitgeteilt, jedoch ist das Intervall zu groß, um eine zuverlässige Interpolation zu ermöglichen; ich habe daher die hier hauptsächlich in Frage kommenden Werte gerechnet und lasse sie hier folgen:

$$Ci\ \pi = +0{,}073\,668\,, \quad Ci\,2\pi = -0{,}022\,562\,, \quad Ci\,3\pi = +0{,}010\,462$$
$$Ci\,4\pi = -0{,}004\,018\,, \quad Ci\,5\pi \qquad\quad , \quad Ci\,6\pi = -0{,}002\,769.$$

In unserm Beispiel der eingespannten Kreisplatte erhält man aus einer Näherungsrechnung mit $k = 6$

$$w_{max} = 0{,}000\,31\,\frac{p\,r_a^4}{N}.$$

674

Tagung für Getriebelehre in Dresden im Oktober 1926.

Von **W. ADRIAN** in Berlin.

Der Einladung des Wissenschaftlichen Beirats des Vereins deutscher Ingenieure zu einer geschlossenen Tagung über reine und angewandte Getriebelehre in Dresden am 15. und 16. Oktober waren etwa 25 Vertreter dieses Gebietes aus Wissenschaft und Industrie gefolgt. Unter Leitung von Professor Kutzbach, Dresden, wurden in Vorträgen und Aussprache die zeitgemäßen Fragen erörtert; die Besichtigung getrieblich wichtiger Einrichtungen in einigen Dresdener Fabriken gab Gelegenheit zu unmittelbarer Erörterung einiger Anwendungsfälle.

Die Reihe der Vorträge eröffnete Professor Alt, Dresden. Er sprach über Gelenkmechanismen und Kurventriebe sowie über Maltesergetriebe und Sternräder. Obering. Höcken, Berlin gab einen Beitrag zur Theorie und Anwendung von Gelenkgeradführungen. Zu diesen Ausführungen über einzelne ebene Getriebe bildeten die von Geheimrat Grübler, Dresden, an Hand von Modellen behandelten Beispiele räumlicher kinematischer Ketten kleinster Gliederzahl eine sehr anregende Ergänzung. Grübler trug folgende Gedanken vor:

Eine räumliche Schraubenpaarkette von n Gliedern ist zwangsläufig, wenn die Anzahl s der diese beweglich verbindenden Schraubenpaare der Beziehung

$$5\,s - 6\,n + 7 = o$$

genügt. (Vergl. Grübler in der Festzeitschrift zum 80. Geburtstage von O. Mohr, S. 124.) Aus dieser Gleichung geht hervor, daß der kleinste Wert, den n haben kann, $n = 7$ ist, womit $s = 7$ folgt. Doch gilt das nur, wenn die Schraubenachsen nach Richtung, Lage und Parameter voneinander unabhängig, also ganz willkürlich wählbar sind. In besonderen Fällen kann n erheblich kleiner sein. Es sei hier nur an die Dreischraubenkette erinnert (vergl. F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II. Kinematik, S. 67), die nur drei Glieder hat; die Schraubenachsen müssen in einer Geraden liegen und die drei Schraubenparameter (Steigungen) eine lineare Beziehung erfüllen.

Die Bedingungen, denen die Abmessungen der Glieder einer zwangläufigen einfachen Schraubenpaarkette genügen müssen, damit die Gliederzahl vermindert werden kann, sind nicht einfach. Wohl aber gibt es einen einfachen Weg zu diesem Ziele und dieser besteht in der Einführung von Elementenpaaren mit höherem Freiheitsgrad als 1. Dieser Weg stützt sich auf folgende Ueberlegung:

Ist in einer zwangläufigen Schraubenpaarkette das Glied K_1 mit dem Glied K_2 durch ein beliebiges Schraubenpaar beweglich verbunden und ebenso K_2 mit K_3, so hat offenbar die Relativbewegung von K_3 gegen K_1 den Freiheitsgrad 2. Es würde sich sonach der Freiheitsgrad der ganzen Kette nicht ändern, wenn man das Glied K_2 beseitigte und das Glied K_3 mit K_1 unmittelbar durch ein höheres Elementenpaar vom Freiheitsgrade 2 verbände. Die so entstehende Kette würde sonach ein Glied weniger haben, aber doch zwangläufig bleiben.

Die Fortsetzung dieser Schlußweise auf das Glied K_4 der Kette, das mit K_3 durch eine Schraube verbunden ist, führt zu dem Ergebnis, daß die Glieder K_2 und K_3 beseitigt werden können ohne die Zwangläufigkeit der Kette zu ändern, wenn man K_4 mit K_1 unmittelbar durch ein Elementenpaar vom Freiheitsgrade 3 verbindet. Doch ist zu beachten, daß mehr als 4 zusammenhängende Glieder einer einfachen Schraubenkette sich nicht durch ein höheres Elementenpaar ersetzen lassen, da der kleinste Wert von n notwendig 3 ist. Hiernach gelangt man zu dem Satz:

Beseitigt man in einer zwangläufigen Schraubenpaarkette i aufeinander folgende Glieder, indem man das erste und das letzte Glied dieser Reihe unmittelbar durch ein höheres Elementenpaar vom Freiheitsgrade i beweglich verbindet, so bleibt die derart entstehende Kette zwangläufig, obgleich ihre Gliederzahl sich um $i - 1$ verringert.

Elementenpaare von höherem Freiheitsgrad gibt es viele; sie lassen sich je nach der Berührung der Elemente in Punkten, Linien oder Flächen unterscheiden. Elementenpaare mit Flächenberührung gibt es nur drei: Das Hohlzylinderpaar mit dem Freiheitsgrade 2, das Kugel- und das Plattenpaar mit dem Freiheitsgrade 3.

Nach dem angegebenen Verfahren kann man nun aus der einfachen siebengliedrigen Schraubenkette eine zwangläufige räumliche Kette erhalten, deren Gliederzahl am kleinsten, nämlich 3, ist, indem man drei Schrauben durch ein Kugelpaar und je zwei Schrauben eines Gliedes durch ein Hohlzylinderpaar ersetzt. Es werden sonach 4 Glieder entfernt und es bleibt eine dreigliedrige Kette mit einem Kugelpaar und zwei Hohlzylinderpaaren nach. Grübler erläuterte die Bewegungsvorgänge in dieser Kette, die in der technischen Praxis schon angewendet worden sind, an einem Modell.

Ersetzt man das Kugelpaar durch ein Plattenpaar, so hat man zu beachten, daß die Neigungswinkel der Zylinderachsen gegen die Ebene des Plattenpaares unter sich und von 90^0 verschieden sein müssen, wenn die entstehende Kette zwangläufig sein soll. Es ist leicht ersichtlich, daß alle Drehungen der Glieder ausgeschlossen sind und diese sich wie die einer Dreischiebepaarkette bewegen.

Ersetzt man in der siebengliedrigen Schraubenpaarkette je zwei aufeinander folgende Schraubenpaare eines Gliedes durch je ein Hohlzylinderpaar, so erhält man eine zwangläufige räumliche Kette mit 4 Gliedern, 3 Hohlzylinderpaaren und einem Schraubenpaar, die dem ebenen Gelenkviereck entspricht. Auch diese Kette wurde von Grübler an einem Modell erläutert und ihre Anwendungsmöglichkeiten angedeutet. Von Wichtigkeit ist hierbei die Tatsache, daß die Zwangläufigkeit aller allgemeinen kinematischen Ketten, also auch der behandelten, von den Abmessungen der Kettenglieder ganz unabhängig ist und nur von der Zahl der Glieder und der beweglichen Verbindungen ihrer Elementenpaare abhängt.

Vorteilhafte Konstruktionsmethoden im Getriebebau auf Grund der Uebersetzungsprüfung behandelte Dr. Dörfel jun. Brünn.

Es ist in der Getriebelehre vorteilhaft, die abstrakten Begriffe tunlichst aus dem Spiele zu lassen und sich auf Größen zu beschränken, die sich geometrisch in wahrer Größe darstellen lassen, also Längen, Winkel, Richtungen, Verhältnisse. Es zeigen sich dann geometrische Beziehungen, die sich für einfache Konstruktionen mit nur wenigen Linien ausbeuten lassen.

Die Auffassung des Getriebebildes als Vektorengleichung, vor allem dargestellt mittels komplexer Zahlen in der Exponentialform in der Gaußschen Ebene, in welcher die horizontalen Richtungen reell und die vertikalen imaginär erscheinen, gestattet die Uebersetzungsprüfung, durch Rechnung, Konstruktion oder Versuch.

Dieser Uebersetzungsprüfung liegt eine Differentialgleichung zugrunde, deren Differentialquotienten die Uebersetzungen sind. Sie folgen unmittelbar aus der Differentiation der Getriebegleichung. Ein unschätzbarer Vorteil der Auffassung ist es, daß die Differentialgleichung auch den Linienzug der einfachsten Konstruktion darstellt. Die erste Differentiation ergibt sämtliche in Betracht kommenden Uebersetzungsarme des Getriebes, welche mit der Antriebgeschwindigkeit multipliziert die Getriebegeschwindigkeiten liefern. Die zweite Differentiation liefert die Fliehkraftarme und Beschleunigungsarme des Getriebes, welche mit dem Quadrate der Antriebsgeschwindigkeit multipliziert werden. Insbesondere führt diese Konstruktion zu einfachen Bildern fast ohne Hilfslinien Hierdurch werden geometrische Zusammenhänge offenbar, welche bei Einführung der Zeitabzisse verborgen bleiben.

Die meisten bisherigen Konstruktionen verlangen die vereinfachende Annahme einer konstanten Antriebsgeschwindigkeit. Nach der neuen Weise wird das geometrische Verhältnis Tangential- zu Radialbeschleunigung eingeführt als Tangente eines vor- oder nacheilenden Phasenwinkels der Antriebskurbel. Der Betrag der Phasenvor- oder -nacheilung an dem Uebersetzungsarme verlängert oder verkürzt den Fliehkraftarm der letzten Kurbel.

Die Einführung des Verhältnisses der GD^2 der Kurbelmassen und des Verhältnisses Kurbelkraft zu Kurbelmassen-Fliehkraft gestattet die geometrische eindeutige Lösung

des freien Spieles der Massen und Kräfte am Getriebe mit wenigen Hilfslinien und die Ermittlung des Abhängigkeitsverhältnisses der Zeitordinate zur Wegabszisse, das ist das Verhältnis der Laufzeiten in jeder Getriebelage.

Professor Pöschl, Prag, sprach über dynamische Kräftepläne.

Für die Bestimmung der Gelenkdrücke und Stabspannungen in Körperketten, oder, wie solche Systeme in der Maschinenlehre kurz genannt werden, Getrieben, sind im wesentlichen die Arbeiten zweier Forscher maßgebend geworden: K. Heun und F. Wittenbauer. Dem ersteren verdanken wir eine allgemeine Darstellung des Problems auf der Grundlage des d'Alembertschen Prinzips und der verschiedenen Lösungsmethoden zur Ermittlung der sog. Elementarreaktionen des Körpers, das sind die »verlorenen Kräfte« für jedes Teilchen, weiter der für jeden beliebigen Schnitt auftretenden Schnittreaktion und der Gelenkreaktionen. Dem zweitgenannten gebührt das Verdienst, die Lösung in einer Form gegeben zu haben, welche den Bedürfnissen des Ingenieurs in jeder Hinsicht angepaßt ist und welche die aus der graphischen Statik als Kräftepläne bekannten Figuren auf dynamische Kräftepläne erweitert.

Der Vortragende ging zunächst kurz auf die rechnerischen Verfahren zur Bestimmung der Gelenkdrücke ein; es gibt hierbei zwei Wege:

1. Das synthetische Verfahren, nach welchem die Kräfte- und Momentengleichungen für jedes Glied der Kette aufgestellt werden; da die Glieder miteinander zusammenhängen, so bekommt man dadurch ein System von Gleichungen, dessen Auflösung für die gewöhnlich verwendeten sog. dynamisch-bestimmten Systeme die Bestimmung aller Reaktionen ermöglicht. Um eine bestimmte Reaktion zu erhalten, ist im allgemeinen die Auflösung des ganzen Gleichungssystems erforderlich. Schon wenn man die Getriebe als ebene Systeme auffaßt, bringt diese Auflösung eine erhebliche Rechenarbeit mit sich. Die Schwierigkeiten wachsen aber noch bedeutend, wenn man die Getriebe, wie es streng genommen sein sollte, als räumliche Systeme ansieht; es erfordert dann z. B. der Fliehkraftregler (nach Heun) die Einführung von 22 Reaktionskomponenten.

Neben diesem synthetischen Verfahren ist 2. das analytische oder Lagrangesche Verfahren zu nennen, dem folgender Gedankengang zugrunde liegt: Die Bewegung eines Getriebes wird durch Angabe seiner kinetischen Energie und seiner virtuellen Arbeit mit Bezug auf die vorhandenen Freiheitsgrade gekennzeichnet. Um nach diesem Verfahren die inneren Kräfte für irgend einen Schnitt zu bestimmen, hat man sich das System an der betreffenden Stelle durchschnitten zu denken. Dadurch ändern sich naturgemäß die Bewegungsmöglichkeiten der einzelnen Glieder. Es sind also gewisse (n) »Erweiterungsparameter« einzuführen, welche diesen neu hinzutretenden Bewegungsmöglichkeiten entsprechen, und diesen Parametern entsprechen n neue Gleichungen in der Lagrangeschen Form. Soll nun die Bewegung des so erweiterten Getriebes gerade so erfolgen, als ob der Schnitt nicht vorhanden wäre, so müssen an der Schnittstelle dynamische Reaktionskomponenten eingeführt werden, welche das Zustandekommen der neuen Bewegungsmöglichkeit verhindern. Diese dadurch nötigen Reaktionskomponenten sind für die abgetrennten Systemteile den eingeprägten Kräften hinzuzufügen und sind durch die Lagrangeschen Gleichungen für die erweiterten Systeme bestimmbar, in denen dann natürlich alle eingeführten Erweiterungsparameter gleich Null zu setzen sind.

Das Verfahren von F. Wittenbauer, das auf die Anlage eines dynamischen Kräfteplans ausgeht, ist seinem Wesen nach identisch mit dem als synthetisch bezeichneten Verfahren, wobei aber die Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Getriebeglieder nicht in rechnerischer, sondern in graphischer Form verwertet werden. Dieses Verfahren werde an dem Beispiel des Kurbelvierecks und seines wichtigsten Sonderfalles, des Schubkurbelgetriebes auseinandergesetzt und sodann die Anwendung auf die Bestimmung der Gelenkdrücke eines Einzylinder-Viertaktmotors angeschlossen.

Der Bestimmung der Gelenkdrücke und Stabspannungen eines Getriebes hat stets die Ermittlung des Bewegungsverlaufes des Getriebes selbst vorauszugehen. Um für ein Getriebe mit gegebener Massenverteilung und gegebenem Kraftfelde den Bewegungszustand zu ermitteln, kann man eins der gebräuchlichen analytischen oder graphischen Verfahren verwenden. Besonders anschaulich ist auch hier die ebenfalls von Wittenbauer gegebene Einführung eines Ersatzsystems, das aus einem einzelnen Punkte mit veränderlicher Masse besteht, welches System so bestimmt wird, daß es in jeder Lage (Kurbelstellung) die gleiche kinetische Energie und die gleiche virtuelle Arbeit besitzt wie das ursprüngliche. Als ausgezeichneter Punkt wird in der Regel der Kurbelzapfen

genommen. Diese Deutung kommt einfach dadurch zustande, daß die Geschwindigkeiten aller Punkte eines zwangläufigen Getriebes linear voneinander abhängen, so daß die kinetische Energie die einfache Form annimmt: $T = {}^1/_2\, \mathfrak{M}(s)\, \dot{s}^2$, während die virtuelle Arbeit $\delta U = Q \cdot \delta s$ zu setzen ist, so daß die Bewegungsgleichung in der Lagrangeschen Form $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q$ unmittelbar die Tangentialkomponente des Bezugspunktes liefert:

$$b_t = \ddot{s} = \dot{v} = \frac{Q - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial M}{\partial s}}{\mathfrak{M}},$$

darin bedeutet s die Wegkoordinate des Bezugspunktes. Die Normalkomponente der Beschleunigung des Bezugspunktes ist durch dessen Geschwindigkeit und Krümmungshalbmesser gegeben. Damit sind auch die Beschleunigungen aller anderen Systempunkte nach bekannten Konstruktionen auffindbar.

Für die Ermittlung der Stabspannungen und Gelenkdrücke wird das gegebene Getriebe durch ein System anderer Art ersetzt. Jedes einzelne Getriebeglied wird durch zwei Massen ersetzt, die in die Gelenkpunkte gelegt werden, in denen das betreffende Glied mit den Nachbarpunkten in Verbindung steht. Voraussetzung für diesen Ersatz ist, daß der Schwerpunkt des betreffenden Getriebegliedes jeweils in die Verbindungslinie der Gelenkpunkte hineinfällt. Die Ersatzmassen dieser beiden Punkte ergeben sich einfach durch statische Zerlegung der Masse des betreffenden Gliedes. Damit aber diese beiden Massen dieselben Massenkräfte (Beschleunigungsdrücke) ergeben wie die ursprüngliche, ist noch ein Moment von der Größe $M(k^2 - ab)\,\dot{\omega} = Kl$ im Sinne der Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ hinzuzufügen. Die Richtigkeit dieser Beziehung ergibt sich unmittelbar aus der bekannten Gleichung: $\bar{b}_s = \frac{b}{l} \cdot \bar{b}_A + \frac{a}{l} \cdot \bar{b}_B$; aus ihr folgt für die Summe der Massenkräfte: $M_A \cdot \bar{b}_A + M_B \cdot \bar{b}_B = M\,\bar{b}_s$ und für die Summe der Momente der Massenkräfte um S:

$$M_A\, b_A \cos\alpha \cdot a - M_B \cdot b_B \cos\beta \cdot b = M \cdot a\, b\, \dot{\omega}.$$

Da das Moment der Massenkräfte des Getriebegliedes $M k^2 \dot{\omega}$ sein soll, so ist daher ein Moment von der angegebenen Größe im Sinne von $\dot{\omega}$ hinzuzufügen.

Um nunmehr den dynamischen Kraftplan für das Kurbelviereck $ABCD$ zu entwerfen, hat man die Massen der drei Glieder 1, 2, 3 durch statische Zerlegung durch je zwei Massen zu ersetzen, die in die Gelenkpunkte A, B, C, D gelegt werden. Sodann werden für alle diese Massen die Trägheitskräfte entgegengesetzt den früher bestimmten Massenkräften angebracht und auch die zusätzlichen Momente entgegengesetzt dem früheren Drehsinn angebracht. Außerdem denkt man sich die Triebkraft P in B am Gliede 1, den Widerstand W in D am Gliede 3 wirkend. Selbstverständlich können durch dieses Ersatzsystem für die Stabspannungen nicht die richtigen Werte erwartet werden, wie sie sich infolge der stetigen Massenverteilung der Stabmassen herausstellen müßten, sondern nur die auf das Ersatzsystem bezüglichen Stabspannungen. Um nun den dynamischen Kraftplan für dieses Ersatzgetriebe zu entwerfen, hat man zu beachten, daß nach dem d'Alembertschen Prinzip die folgenden Kräftegruppen Gleichgewichtgruppen bilden müssen:

Gesamtsystem: $A \quad T_{B1} \quad W \quad T_{B2} \quad T_{C2} \quad P \quad T_{C3} \quad D$

Glied 1: $A \quad T_{B1} \quad W \quad B$, Glied 2: $B \quad T_{B2} \quad T_{C2} \quad C$, Glied 3: $C \quad P \quad T_{C3} \quad D$

Knoten A: $A \quad K_1 \quad S_1$, Knoten B: $S_1 \quad K_1 \quad T_{B1} \quad W \quad T_{B2} \quad K_2 \quad S_2$

Knoten C: $S_2 \quad K_2 \quad T_{C2} \quad P \quad T_{C3} \quad K_3 \quad S_3$, Knoten D: $S_3 \quad K_3 \quad D$

Ausgehend vom Punkte 0 läßt sich der Kräfteplan in der aus der Abb. 1 ersichtlichen Folge entwerfen. Um die Veränderlichkeit der wirklichen Stabspannungen in Richtung der Verbindungslinien der Gelenkpunkte zu erhalten, beachte man, daß von einem Ende jedes Stabes bis zum anderen in der Stabrichtung die in diese fallenden Komponenten der Trägheitskräfte hinzutreten. Wenn daher z. B. herrührend vom Gelenkdruck B die Komponente S_{2B} in die Stabrichtung fällt, so ist die Stabkraft in C S_{2C} geworden. Dasselbe gilt für die anderen Stäbe, aus denen das Getriebe besteht. Ebenso sind durch die zu den Stabrichtungen senkrechten Komponenten die Querkräfte am Anfang und Ende der Bewegung zu entnehmen.

In ganz der gleichen Weise und mit den gleichen Bezeichnungen ist der Kräfteplan für das Schubkurbelgetriebe anzulegen.

Nach dieser Konstruktion ist in den Abb. 2 bis 7 die Ermittlung der Gelenkdrücke für einen Viertaktmotor durchgeführt. Es ist dabei die vereinfachende Voraussetzung gemacht worden, daß die Schwankungen der Drehgeschwindigkeit der Kurbel vernachlässigt werden können. Ferner ist die Masse der Kurbel unberücksichtigt gelassen, um den Einfluß der Massendrücke der hin- und hergehenden Teile und der Schubstange allein verfolgen zu können. Dieses Beispiel ist der im Erscheinen begriffenen zweiten Auflage des Werkes über »Dieselmaschinen« von Prof. Kamillo Körner, Prag, entnommen. An jeder Stelle ist der am Kurbelzapfen angreifend gedachte Widerstand so bestimmt gedacht, daß die Bedingung der gleichbleibenden Drehgeschwindigkeit erfüllt scheint. Aus dem Verlauf der Kurven für die Zapfendrücke C, B, A, ist zu ersehen, daß diese in der Nähe der Totlagen oder in diesen selbst ihre größten Werte annehmen und daß die Kurven für die Phasen des Ansaugens und des Auspuffes, soweit die betr. Drücke mit dem Atmosphärendruck zusammenfallen, symmetrisch liegen. Das Verfahren selbst ist außerordentlich einfach durchführbar und

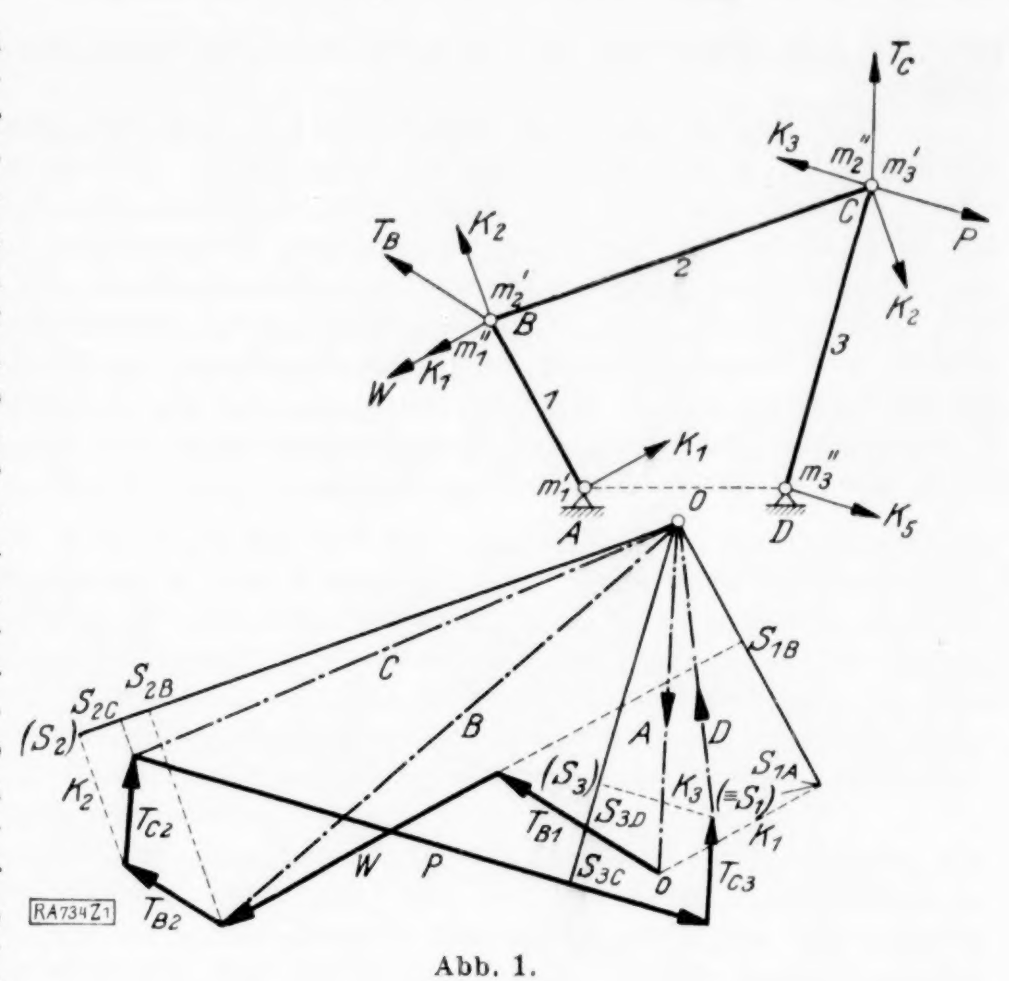


Abb. 1.

Abb. 2.

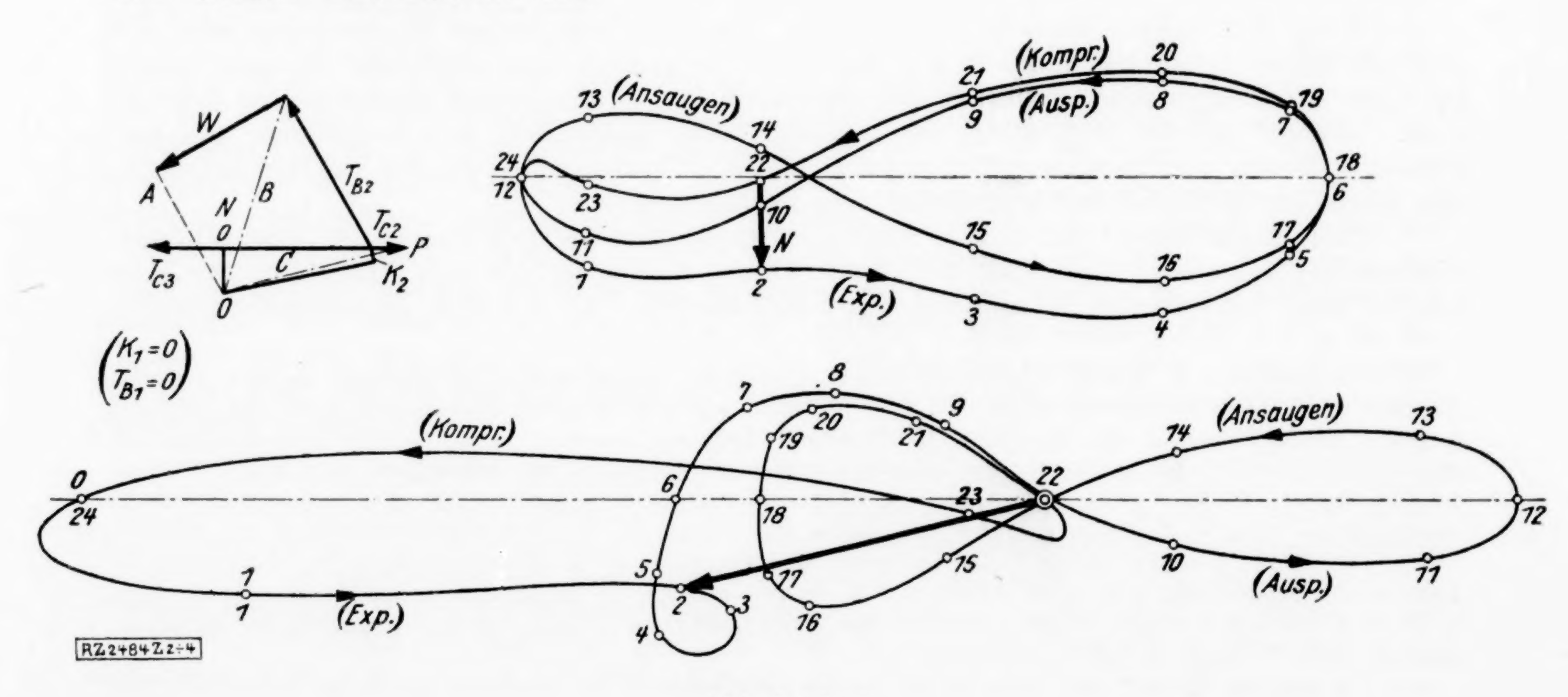


Abb. 3 bis 5.

gibt für jede Kolbenstellung in einer einzigen Figur die sämtlichen gesuchten Reaktionsgrößen [1]).

Die Einführung von Ersatzmassen fand lebhafte Erörterung, an der sich besonders Alt, Marx und Skutsch beteiligten. Alt wies gegenüber der Wittenbauerschen Methode auf die Ermittlung der resultierenden Trägheitskraft hin. Marx hielt es für noch einfacher, nach den allgemeinen Grundsätzen der Mechanik die im Schwerpunkt angreifende Massenkraft und das aus dem Produkt von Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt mal Winkelbeschleunigung gewonnene Drehmoment getrennt einzuführen und dieses Moment beispielsweise durch ein Kräftepaar darzustellen, dessen Arm die Entfernung zweier Gelenkpunkte ist. Skutsch bedauerte, daß die sehr brauchbare Poinsotsche Ermittlung der Ersatzmassen zwar von Föppl in seinem Lehrbuch erwähnt wird, aber nirgends Anwendung findet.

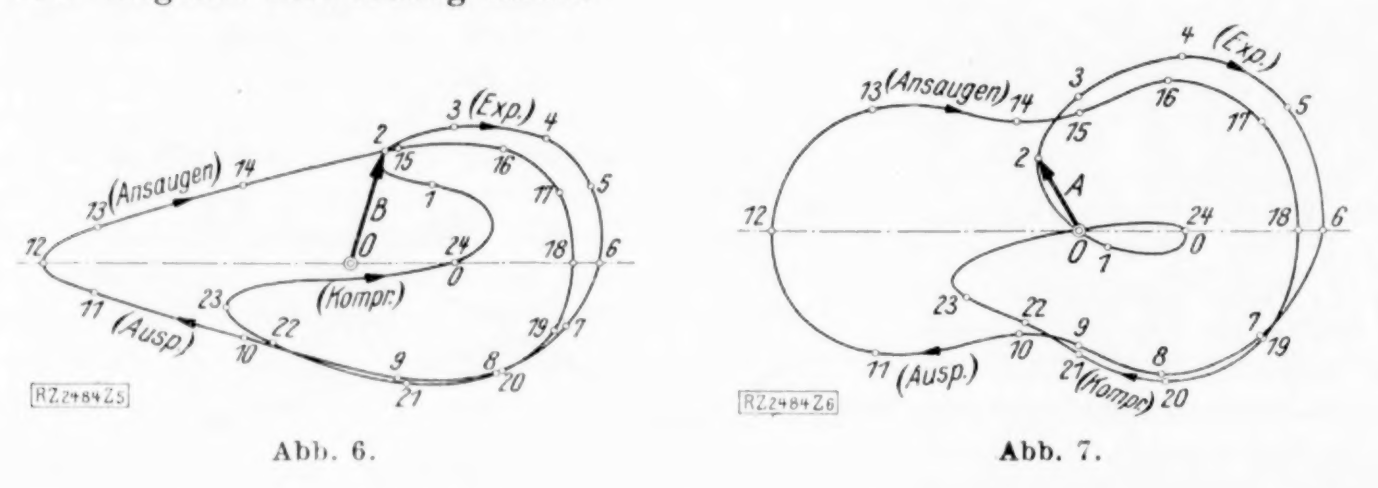


Abb. 6. Abb. 7.

Fragen der Fertigung wurden gestreift in dem Vortrage von Professor Kutzbach über Wälzgetriebe und Schraubgetriebe. Nach systematischer Betrachtung der möglichen Fälle zur Uebertragung einer Drehbewegung zwischen gegebenen Achsen ging Kutzbach kritisch auf die neuesten Konstruktionen von Kegelrädern mit Spiralverzahnung ein, die hauptsächlich für den Kraftwagenbau immer wachsende Bedeutung gewinnen. Dipl.-Ing. Altmann, Dresden, ergänzte diese Ausführung aus dem Gesichtspunkt der Reibungsverminderung.

Der letzte Nachmittag der Tagung wurde ausgefüllt mit einer eingehenden Besprechung der Hochschuldozenten über die Behandlung der Getriebelehre an den Technischen Hochschulen. Es wurden Referate erstattet von Prof. Alt, Geheimrat R Müller, Darmstadt und Prof. Marx, München. An der sehr angeregten Aussprache beteiligten sich in der Hauptsache die Herren Geheimrat Mollier, Dresden, Grübler, Dresden, Professor Körner, Prag und Kutzbach, Dresden.

Prof. Alt führte etwa folgendes aus: An den Technischen Hochschulen wird die Getriebelehre bisher im Rahmen der Kinematik behandelt und zwar nur als eine Untersuchung der Bewegungsverhältnisse von Getrieben, die in allen ihren Abmessungen bekannt sind. Hierbei werden vor allem die geometrischen Hilfsmittel zur Ermittlung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen entwickelt. Vorzugsweise werden als Anwendungen die Steuerungsgetriebe der Kraftmaschinen herangezogen.

Das große Gebiet der immer wichtiger werdenden Getriebemaschinen (Verpackungsmaschinen, Kartonagemaschinen, Schuhmaschinen, landwirtschaftliche Maschinen usw.) erfordert eine weitgehende Behandlung der Getriebelehre. Es hat sich immer mehr gezeigt,

[1]) Literatur: K. Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, Bericht, erstattet der Deutschen Mathematikervereinigung IX 2. — Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik, Leipzig, Göschen 1902, Lehrbuch der Mechanik I, Kinematik Leipzig, Göschen 1906. — Die Grundgleichungen der Kinetostatik der Körperketten mit Anwendung auf die Mechanik der Maschinen, Z. f. Math. u. Phys. Bd. 56, Heft 1, 1908. — Die Bedeutung des D'Alembert'schen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen, Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe II.

F. Wittenbauer, Graphische Dynamik der Getriebe, Z. f. Math u. Phys. 50, Bd. 1904. — Dynamische Kraftpläne, dto. 5. Bd. 1906, Heft 3. — Die graphische Ermittlung des Schwungradgewichtes, Z. V. D. I. 1905. — Dynamischer Kraftplan des Kurbelgetriebes, ebenda 1906. — Graphische Dynamik, Berlin Julius Springer 1923.

H. Meuth, Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes, Doktor-Dissertation Karlsruhe 1905.

M. Hiepe, Die spezifischen Schnittreaktionen des Schubkurbelgetriebes, Doktor-Dissertation Jena 1915.

O. Kölsch, Gleichung und Massenkräfte bei Fahr- und Flugzeugmaschinen, Berlin, J. Springer. 1911.

daß die bisher üblichen Probiermethoden bei der Konstruktion der Getriebemaschinen unzulänglich sind und daß eine planmäßige wissenschaftliche Behandlung der Getriebelehre notwendig ist. An den Technischen Hochschulen bzw. an einigen von ihnen muß daher die Möglichkeit für die Ausbildung von Ingenieuren in der Getriebelehre und in der Konstruktion von Getriebemaschinen geschaffen werden, wobei es sich vor allem um die Ausbildung in der Getriebesynthese handelt, d. h. in dem Gebiet, das sich mit der allgemeinen Aufgabe befaßt: Wie müssen Getriebe hinsichtlich ihrer Bauart und ihrer Abmessungen konstruiert werden, damit sie sich in bestimmter vorgeschriebener Weise bewegen und bei ihrer Bewegung bestimmte vorgeschriebene Bedingungen erfüllen?

Ueber die weiteren Einzelheiten und insbesondere über das Programm, nach dem die Getriebelehre am zweckmäßigsten an den Technischen Hochschulen behandelt wird, soll demnächst eine besondere Veröffentlichung unterrichten.

Geh. R. Müller, Darmstadt, ging zunächst auf die Verhältnisse an der Darmstädter Technischen Hochschule beim Unterricht in der Kinematik ein. Dort wird dieser Gegenstand in zwei weitauseinanderliegenden Abschnitten behandelt, nämlich bereits im zweiten Semester und in einer zweistündigen Vorlesung mit Uebungen über theoretische Kinematik — geometrische Bewegungslehre — und dieser Teil befindet sich in den Händen des Vertreters der darstellenden Geometrie; daran schließt sich im sechsten bzw. siebenten Semester ein gleichfalls zweistündiger Vortrag über praktische Getriebelehre bei dem Vertreter der Maschinenelemente.

Die Angliederung der Kinematik an den Lehrstuhl für darstellende Geometrie, die einem Wunsche der Maschinenbauabteilung entsprach, hat sich für beide Lehrgebiete in mannigfacher Beziehung als vorteilhaft erwiesen. Denn in Darmstadt reicht die darstellende Geometrie bis in das zweite Semester hinein, hier laufen also beide Vorträge nebeneinander her, wodurch sich Gelegenheit bietet, zwischen ihnen Brücken zu schlagen. Damit erhält der Vortragende in der Anordnung seines Stoffes eine größere Bewegungsfreiheit, auch lassen sich die Uebungen für beide Fächer bequem zusammenlegen. Dadurch, daß dieser Teil der Kinematik bereits so früh gehört wird, dient er zugleich als Unterlage für gewisse Kapitel der Vorlesung über Maschinenelemente, die im dritten Semester beginnt.

Die Verteilung der theoretischen und der praktischen Kinematik an zwei verschiedene Lehrstühle setzt natürlich eine innige Fühlungnahme zwischen den beiden Dozenten voraus. Aber dafür ist in Darmstadt in genügendem Maße gesorgt.

Die Vorlesung über theoretische Kinematik erstreckt sich in der Regel nur auf die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, also auf Pol und Polkurven, Krümmung der Bahnen, Zusammensetzung der Bewegungen, Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des Systems. Dabei sind natürlich auch gewisse der Praxis entlehnte Beispiele zur Belebung des Unterrichts unentbehrlich, so das Kurbelgetriebe mit seinen Abarten, die einfachsten Geradführungen und die Verzahnung der Stirnräder.

Die Behandlung des Stoffes ist durchweg rein geometrisch, nicht aus übergroßer Vorliebe für die »Reinheit der Methode«, sondern vorwiegend aus didaktischen Gründen, weil der Anfänger auf diesem Wege am leichtesten in das eigentliche Wesen der Sache einzudringen vermag. Der Vortragende weiß sich in dieser Hinsicht einig mit seinen Kollegen der Maschinenbauabteilung, die auf die Verwendung anschaulicher Methoden gleichfalls den größten Wert legen. Das soll aber keineswegs eine Geringschätzung der Analysis bedeuten, die doch auf alle Fälle das bei weitem mächtigste Werkzeug der mathematischen Forschung, auch in den Anwendungsgebieten bleibt. In der angewandten Mathematik, also auch in der Kinematik, ist schließlich jedes Mittel recht, wenn es nur möglichst einfach zum gewünschten Ziele führt, und bei der Behandlung eines Problems kommt es ganz auf die Beschaffenheit der Aufgabe an, ob man sie besser analytisch oder geometrisch anfaßt.

In Darmstadt findet sich auch seit einer Reihe von Jahren immer eine Anzahl von Studierenden des Maschinenbaus und der Mathematik, die an der Kinematik soviel Geschmack gewonnen haben, daß sie eine Fortsetzung der Vorlesung im nächsten Semester wünschen. Vor einem solchen, naturgemäß kleineren Hörerkreise wird je nach der Fachrichtung der Beleger die Theorie des Gelenkvierecks von etwas höherem Standpunkte aus behandelt, dann das Problem der genauen und der angenäherten Geradführung, wohl auch eine kurze Wiederholung der allgemeinen Theorie der ebenen Bewegung, jetzt aber in analytischer Darstellung, vor allem aber die Bewegung eines starren räumlichen Systems.

Ueber den kinematischen Unterricht an der Technischen Hochschule München berichtete Prof. Marx:

Der Unterricht umfaßt an Vorlesungen 3 Pflichtstunden im 5. Semester, an Uebungen 4 Pflichtstunden im 6. Semester der Maschineningenieure. Er erstreckt sich auf Kinematik, Getriebelehre und graphische Dynamik. Während die Kinematik sich auf Burmester gründet, baut sich die Getriebelehre auf den von Lynen geschaffenen Anschauungen auf, durch die eine einheitliche Betrachtung aller denkbaren zwangläufigen Getriebe ermöglicht wird. Sie alle sind Kurbelgetriebe, ihre Ordnungsziffer »n« bemißt sich nach der möglichen Anzahl der unabhängig angetriebenen Glieder (»Kurbeln«), ihre Gliederzahl ist $4n - 2$. Durch Erweiterung oder Kürzung usw. wird diese stets um eine gerade Zahl vermehrt oder vermindert. Der Bewegungszustand wird ausschließlich auf Grund von Vektorgleichungen zeichnerisch dargestellt; die Gleichungen werden in einer solchen Form angesetzt, daß sie auch für Sonderfälle und -Lagen gelten. Sie gestatten nach dem Verfahren Lynens vor allem die unmittelbare Aufzeichnung des Bewegungszustandes der Getriebe mit höherer Ordnungsziffer (früher zusammengesetzte Getriebe, Getriebe mit Dreigelenkstangen usw. genannt). Die Getriebedynamik beschäftigt sich mit der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen des Getriebes sowohl unter der Wirkung äußerer Kräfte als auch der Massenkräfte. Die Behandlung erfolgt nach den allgemeinen Grundsätzen der Technischen Mechanik; mit Vorteil wird das Seileck verwendet, das in zwei durch kinematische Sonderbedingungen ausgezeichneten Erscheinungsformen auftritt.

Der Unterricht in München sieht sein Ziel in der Errichtung eines Gesamtgebäudes der Kinematik in Uebereinstimmung mit der Höheren Mathematik, der Physik und der technischen Mechanik. In den Uebungen werden größere Aufgaben aus der Getriebedynamik gelöst. Die Vertiefung in Einzelgebiete ist in dieser Vorlesung gemäß den allgemeinen Anschauungen der Technischen Hochschule München nicht beabsichtigt; sie müßte besonderen Wahlvorlesungen überlassen werden; dazu fehlt aber gegenwärtig vor allem der Platz; die kinematische Sammlung ist räumlich sehr beengt, und die Neubauten sind noch nicht vollendet. 734

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Frage der Schwingungen in Wasserschlössern. 1. Die Schwingungen des Wassers in Wasserschlössern und den daran anschließenden Rohrleitungen nach dem Staubecken auf der einen und nach den Turbinen auf der anderen Seite sind in den letzten Jahren vielfach und unter Voraussetzung verschiedener Betriebsverhältnisse untersucht worden; es sei hier nur auf die bekannten Arbeiten von E. Braun, H. Busch, Ph. Forchheimer, R. Grammel, L. Mühlhofer, R. Müller, F. Prašil, A. Schoklitsch, D. Thoma, F. Vogt u. a. verwiesen[1]). In der vorliegenden Mitteilung wird gezeigt, daß sich an den bisher verwendeten Ansätzen eine Ergänzung anbringen läßt, die freilich für die praktisch vorkommenden Abmessungen nur geringfügige Abweichungen gegen die bekannten Ergebnisse hervorruft, die aber grundsätzlich nicht ohne Interesse zu sein scheint. Diese Ergänzung ergibt sich, wenn der Inhalt des Staubeckens sehr groß angenommen wird gegen die in den Leitungen und im Wasserschloß befindlichen Wassermengen und berücksichtigt wird, daß die durch den jeweiligen Spiegelunterschied beschleunigte Wassermasse tatsächlich veränderlich ist; eine Folge dieses Umstandes ist, daß die Schwingungen um den Ruhespiegel unsymmetrisch werden, so daß der Wasserspiegel aus seiner Gleichgewichtslage nach oben anders ausschwingt als nach unten. Die Gleichung, die man (wenn von Widerständen abgesehen wird) erhält, ist nicht mehr die einer harmonischen Schwingung, sondern sie wird von der Art, wie sie beim Raumpendel für die Winkelkoordinaten auftreten, und ist durch elliptische Funktionen lösbar.

Wollte man die Strömungswiderstände mit berücksichtigen, so hätte man weitere Glieder einzuführen, die von der Geschwindigkeit abhängen und stets der jeweiligen Bewegungsrichtung entgegenwirken; diese bringen eine Dämpfung mit sich, die bis zum vollständigen Abklingen der Schwingungen andauert. Dabei ist zu beachten, daß diese Dämpfung nur dann in analytischer Form für den ganzen Strömungsvorgang angesetzt werden kann, wenn die Strömungswiderstände durch ungerade Potenzen der Geschwindigkeit ausgedrückt werden können; wird dagegen ein Ansatz verwendet, in dem gerade (oder gebrochene) Potenzen der Geschwindigkeit vorkommen, wie z. B. das quadratische Widerstandsgesetz, so muß die Tatsache, daß diese Widerstände

[1]) Eine Untersuchung der Stabilität der Schwingungen, die sich unter den verschiedenen Betriebsverhältnissen ergeben, ist in der Dissertation des Herrn Dr.-Ing J. Schüller enthalten, die an meiner Lehrkanzel ausgearbeitet wurde und an anderer Stelle veröffentlicht wird.

stets der Bewegungsrichtung entgegenwirken, für beide Strömungsrichtungen durch zweierlei Vorzeichen der betreffenden, die Geschwindigkeit enthaltenden Glieder zum Ausdruck kommen, wodurch die Differentialgleichung der Bewegung ihren analytischen Charakter verliert und stückweise — von eine Nullstelle der Geschwindigkeit zur nächsten — integriert werden muß. In dieser Weise haben H. Burkhardt[1]), J. Horn[2]), u. a. die Aufgabe in den bekannten Arbeiten durchgeführt. — In der vorliegenden Mitteilung wird auf die Strömungswiderstände keine Rücksicht genommen. —

Der hier behandelte Fall ist auch deshalb bemerkenswert, weil er eine der wenigen bekannten technischen Anwendungen der Dynamik veränderlicher Massen darstellt.

2. Das Schwingungsproblem sei durch folgende Angaben gekennzeichnet (Abb. 1): Ein

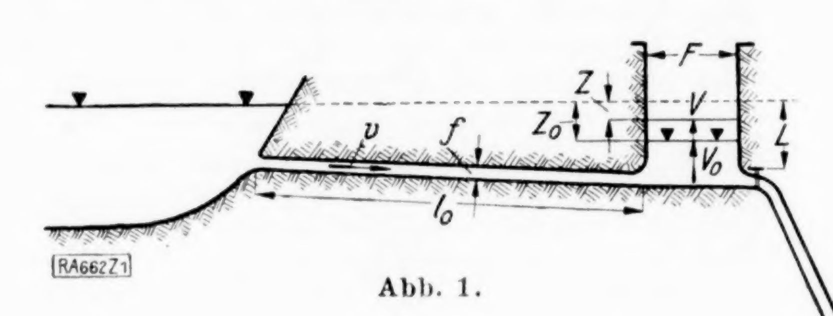


Abb. 1.

Staubecken von großem Inhalte steht durch eine Stollenleitung von konstantem Querschnitte f und der Länge l_0 mit einem Wasserschloß von konstantem Querschnitte F in Verbindung. Beim Dauerbetriebe steht das Wasser im Wasserschloß um eine Höhe z_0 tiefer als im Staubecken, die bei widerstandsfreier Strömung gleich ist der Geschwindigkeitshöhe entsprechend der Geschwindigkeit im Stollen (und bei Berücksichtigung der Strömungswiderstände der Widerstandshöhe zwischen diesen beiden Stellen gleich wäre). Wir nehmen nun an, daß der Durchfluß des Wassers durch die Turbinen plötzlich abgestellt werde, und fragen nach der Bewegung der Wassermasse, die im Stollen und im Wasserschloß enthalten ist; bei der Ermittlung dieser Bewegung selbst soll die Reibung wieder außer Acht bleiben. Durch die im Momente der Absperrung auftretenden Stoßvorgänge wird die im Wasserschloß enthaltene Wassermasse eine Anfangsgeschwindigkeit V_0 erhalten, die als bekannt angesehen wird. Die in jedem Augenblick der darauffolgenden Bewegung vorhandene Höhendifferenz dient zur Beschleunigung einer Wassermasse, die mit der Zeit veränderlich ist. Es sind daher die Bewegungsgleichungen in der Form zu verwenden, die von E. J. Routh[3]) angegeben wurde und die später auch von F. Wittenbauer[4]) zur Lösung hierhergehöriger Aufgaben verwendet wurde. Sie bringt das dynamische Grundgesetz in der Form zum Ausdruck: die Aenderung der Bewegungsgröße in der Zeiteinheit ist gleich der bewegenden Kraft:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{d(Mv)}{dt} = K \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wenn die hinzutretende Masse selbst eine Geschwindigkeit v' besitzt, so wäre rechts noch das Glied $v' \cdot \frac{dM}{dt}$ hinzuzufügen. Im vorliegendem Falle ist $v' = 0$ zu setzen und daher gilt die Gleichung in der angeschriebenen Form (1). Auf diese Weise erhält man tatsächlich nichts anderes als die Schwingung einer Flüssigkeit in kommunizierenden Gefäßen, deren eines als ein sehr großer Flüssigkeitsbehälter zu betrachten ist.

Für irgend eine Zwischenstellung z des Spiegels sei v die Geschwindigkeit im Stollen und V die Geschwindigkeit im Wasserschloß; daher ist die Bewegungsgröße, wenn ϱ die Dichte bezeichnet:

$$\mathfrak{B} = \varrho [f l_0 v + F(L - z) V].$$

Wegen der Durchflußgleichung ist nun

$$f v = F V = F \cdot \frac{dz}{dt},$$

und wenn noch $l_0 + L = l$ gesetzt wird, so folgt

$$\mathfrak{B} = \varrho [l_0 + L - z] \cdot F V = \varrho F (l - z) \frac{dz}{dt}$$

In dieser Stellung ist die bewegende Kraft:

$$K = - \gamma F z.$$

Daher lautet die Bewegungsgleichung (1) nach einigen Kürzungen

$$\frac{d}{dt}\left[(l - z)\frac{dz}{dt}\right] = - g z \quad . \quad . \quad (2).$$

Führt man die Differentiation aus und setzt

$$\frac{dz}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz} \cdot V = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dz},$$

so erhält man die lineare Differentialgleichung 1. O. in V^2:

$$\frac{dV^2}{dz} - \frac{2}{l - z} V^2 = - 2 g \frac{z}{l - z} \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet: wenn C eine Integrationskonstante bedeutet

$$V^2 = \frac{C - g l z^2 + \frac{2g}{3} z^3}{(l - z)^2}$$

und da für $z = z_0$, $V = V_0$ sein soll:

$$V^2 = \frac{V_0^2 (l - z_0)^2 + g l (z_0^2 - z^2) - \frac{2g}{3}(z_0^3 - z^3)}{(l - z)^2}$$

[1]) Schwingungen unter Einfluß einer dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung. Z. f. Math. u. Phys., 63. Bd. 1915, S. 303 ff.

[2]) Z. f. Math. u. Phys., Bd. 47 bis 52, 1902 bis 1905.

[3]) Die Dynamik der Systeme starrer Körper I S. 273.

[4]) Die Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse. Z. f. Math. u. Phys. 52. Bd. 1905 S. 150 u. Graphische Dynamik, Berlin 1923 S. 659 ff.

und weiter, da $V = \frac{dz}{dt}$ ist:

$$t = -\int_{z_0}^{z} \frac{(l - z)\, dz}{\sqrt{V_0^2 (l - z_0)^2 + g\, l\, (z_0^2 - z^2) - \frac{2\, a}{3} (z_0^3 - z^3)}}.$$

In **dieses** Integral führen wir dimensionslose Veränderliche ein:

$$\frac{z}{l} = w, \quad \frac{z_0}{l} = w_0,$$

wobei sowohl w wie w_0 als sehr viel kleiner als 1 anzusehen sind; ferner setzen wir

$$\frac{6\, V_0^2}{g\, l} (1 - w_0)^2 + 6\, w_0^2 - 4\, w_0^3 = 6\, \alpha^2$$

und erhalten somit:

$$\sqrt{\frac{g}{6\, l}}\, t = -\int_{w}^{w_0} \frac{(1 - w)\, dw}{\sqrt{4\, w^3 - 6\, w^2 + 6\, \alpha^2}} = -\int_{w}^{w_0} \frac{(1 - w)\, dw}{\sqrt{\Phi(w)}}$$

Das Integral muß reell sein, daher muß $\Phi(w)$ für alle Werte von w, die bei der Bewegung vorkommen, positiv sein. Da $\Phi(-\infty) = -\infty$, $\Phi(0) = 6\, \alpha^2 > 0$ (was stets als erfüllt angesehen werden kann) und $\Phi(\infty) = \infty$, so zeigt $\Phi(w)$ als Funktion von w den in Abb. 2

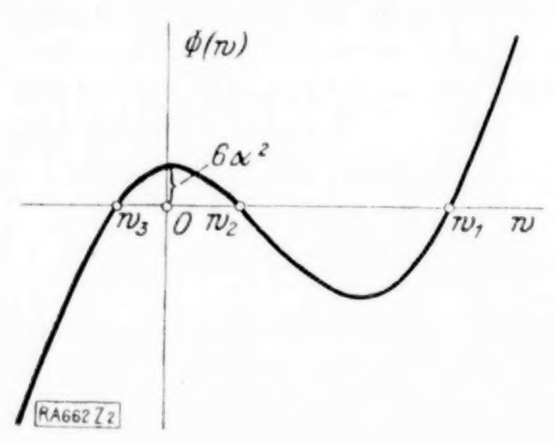


Abb. 2.

gezeichneten Verlauf. Seien w_1, w_2, w_3 (mit $w_1 > w_2 > w_3$) die Wurzeln der Gl. $\Phi(w) = 0$, so ist:

$$\Phi(w) = 4\, w^3 - 6\, w^2 + 6\, \alpha^2$$
$$= 4\, (w - w_1)\, (w - w_2)\, (w - w_3).$$

Führen wir hier neue Veränderliche Z ein durch

$$w = Z + 2$$

und schreiben dementsprechend

$$w_\nu = e_\nu + 2\,, \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)\,,$$

so geht $\Phi(w)$ in einen Ausdruck über, der mit $\Phi(Z)$ bezeichnet werde:

$$\Phi(Z) = 4\, (Z - e_1)\, (Z - e_2)\, (Z - e_3)$$

und es ist dabei:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Nun ist $\Phi(Z)$ positiv, wenn Z zwischen e_2 und e_3 liegt, daher ist die Dauer einer Schwingung, T, durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\sqrt{\frac{g}{6\, l}}\, T = \int_{e_3}^{e_2} \frac{(1 + Z)\, dZ}{\sqrt{4\, (Z - e_1)\, (Z - e_2)\, (Z - e_3)}} \quad . \quad (4).$$

Setzt man nun:

$$Z = p\,(u),$$

wobei $p(u)$ die Weierstraßsche elliptische Funktion bedeutet, so ist bekanntlich:

$$p'^2 = 4\, p^3 - g_2\, p - g_3 = 4\, (p - e_1)\, (p - e_2\, (p - e_3)$$

und es folgt:

$$\sqrt{\frac{g}{6\, l}}\, T = \int_{\omega_3}^{\omega_2} \frac{(1 + p)\, p'\, du}{p'} = \int_{\omega_3}^{\omega_2} [1 + p\,(u)]\, du$$
$$= (\omega_2 - \omega_3) + \zeta(\omega_2) - \zeta(\omega_3) \quad . \quad . \quad (5),$$

wobei sofort einleuchtet, daß der Ausdruck rechter Hand positiv ist. Darin bedeuten die Größen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (mit $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$), die den Wurzeln e_1, e_2, e_3 entsprechenden Halbperioden der elliptischen Funktion $p(u)$ und $\zeta(u)$ die elliptische Zetafunktion.

3. Von Interesse sind nun die angenäherten Werte für die Schwingungsausschläge w_2 und w_3 und für die Schwingungsdauer T. Zur Berechnung der Wurzeln der Gleichung

$$\Phi(w) = 4\, w^3 - 6\, w^2 + 6\, \alpha^2 = 0$$

benützen wir das sog. Iterationsverfahren[1]; wir rechnen zunächst w:

$$w = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{2}{3} w^3}$$

setzen als 1. Annäherung in der Quadratwurzel $w = 0$ und erhalten damit in 2. Annäherung:

$$w = \pm\, \alpha$$

und weiter in 3. Annäherung:

$$w = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{2}{3} (\pm\, \alpha)^3} = w_{2,3} \quad . \quad (6),$$

woraus die Unsymmetrie der Schwingungsausschläge nach oben und unten zu unmittelbar erkennbar ist. Da der Differentialquotient des Wurzelausdruckes im ersten Ansatz für w die Größe hat:

$$-\frac{2\, w^2}{2 \sqrt{\alpha^2 - \frac{2}{3} w^3}} = -w$$

und dieses, absolut genommen, sicher kleiner als 1 ist, so ist das Iterationsverfahren zur Berechnung der Wurzeln sicher anwendbar.

Für die Schwingungsdauer erhielten wir den Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{g}{6\, l}}\, T = \int_{w_2}^{w_3} \frac{(1 - w)\, dw}{\sqrt{6\, (\alpha^2 - w^2) + 4\, w^3}}.$$

Wird hierin in 1. Annäherung das Glied mit w^3 im Nenner unterdrückt, so folgt daraus:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, T = \int_{w_2}^{w_3} \frac{(1 - w)\, dw}{\sqrt{\alpha^2 - w^2}} = \left[\arc \sin \frac{w}{\alpha}\right]_{w_2}^{w_3}$$
$$+ \left[\sqrt{\alpha^2 - w^2}\right]_{w_2}^{w_3} = \pi$$

[1]) Siehe z. B. C. Runge, Praxis der Gleichungen, Sammlung Schubert, Bd. 14, S. 56 ff.

und damit der bekannte Ausdruck:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Die Berechnung der folgenden Näherung für T ist jedoch wesentlich umständlicher.

Prag. Th. Pöschl. 662

Zur asymptotischen Behandlung der stationären Lösungen im Turbulenzproblem.[1]) Frühere Untersuchungen über das Turbulenzproblem haben, zum Zwecke leichterer Rechnung, wiederholt dazu geführt, das Geschwindigkeitsprofil der zugrunde gelegten Parallelströmung als unstetig, oder wenigstens im Gradienten unstetig, vorauszusetzen; und zwar unabhängig von der Frage, ob solche Profile sich stationär erhalten können oder nicht. Ein Profil der ersteren Art hat der Verfasser benutzt[2]), um zu zeigen, daß es Fälle gibt, in denen unsere charakteristische Gl. (27) wenigstens eine rein imaginäre Wurzel $S = R\alpha$ besitzt, so daß sich für diesen ausgezeichneten Wert trotz der inneren Reibung stationäre Schwingungen überlagern ließen. Andererseits hat L. Prandtl[3]) bei seinen Untersuchungen »geknickte Profile« zugrunde gelegt, d. h. eben solche, die zwar selbst überall stetig sind, aber an einzelnen Stellen unstetige Tangentenrichtung haben; insbesondere z. B. Profile, die aus Geradenstücken zusammengesetzt sind. Es erscheint daher nötig, auch diese Fälle in die vorangehend entwickelte allgemeine Theorie einzuordnen, da dort Unstetigkeiten beiderlei Art durch die Voraussetzungen auf S. 233 noch ausgeschlossen waren.

Diese Voraussetzungen waren aber nur gemacht worden, um die Form des verwendeten Greenschen Satzes (9), (9') möglichst handlich zu gestalten, und die Einordnung ist vollzogen, wenn der Greensche Satz so erweitert ist, daß er die ausgeschlossenen Fälle mit umfaßt, da alles Folgende von dieser Grundlage ausgeht. Es ist zu dem Zwecke nur nötig, Unstetigkeitsbedingungen für die abhängige Funktion φ selbst, bezw. ihre Ableitungen, aufzustellen, die sich aus der Unstetigkeit des Profils ergeben müssen, wie in der oben unter[2]) zitierten Arbeit bereits geschehen ist.

Wir gehen aus von der Grundgleichung (3), bezw. (4):

$$L(\varphi) = \varphi^{IV} - 2\,\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi$$
$$+ S\{(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi\} = 0 \quad (3)$$

und setzen voraus, daß die Funktion U selbst, sowie $U' = dU/dy$ an einzelnen Stellen unstetig sein kann. Es sollen dabei, wie es die physikalische Bedeutung erfordert, nur solche Lösungen $\varphi(y)$ gesucht werden, die mit ihrer ersten Ableitung $\varphi'(y)$ überall stetig bleiben. Dann lehrt aber die Gl. (3), daß die höheren Ableitungen φ'' und φ''' an den Sprungstellen von U und U' nicht stetig bleiben können. Man findet die entsprechenden Gleichungen, indem man (3) über ein kleines Gebiet zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstellen integriert und dabei U, bezw. U' als Grenzfall stetiger, aber rasch veränderlicher Funktionen betrachtet. Man sieht sofort, daß hierbei Unstetigkeiten von φ''' und φ'' nur aus den Gliedern mit Faktoren U'', bezw. U' resultieren können, die in der Grenze unendlich werden; daß insbesondere alle die Glieder, die α^2 enthalten, ohne Einfluß bleiben. Man kann also mit der verkürzten Gleichung arbeiten (das endliche Glied $U\varphi''$ wird zweckmäßig beibehalten):

$$\varphi^{IV} + S[U\varphi'' - U''\varphi] = 0 \quad . \; . \; . \quad (37),$$

und erhält daraus durch eine erste Integration:

$$\varphi''' + S[U\varphi' - U'\varphi] = \text{konst.} \quad . \; . \quad (38).$$

Daraus folgt dann durch den Grenzübergang, wenn $\pm$ die beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle charakterisiert:

$$\varphi_+''' - \varphi_-''' = - S[(U_+ - U_-)\varphi'$$
$$- (U_+' - U_-')\varphi] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

In (38) werden in der Grenze nur φ''' und das Glied mit U' unendlich und sie ergeben dann bei nochmaliger Integration:

$$\varphi_+'' - \varphi_-'' = S(U_+ - U_-)\varphi \quad . \; . \quad (40).$$

In (39), (40) sind damit die gesuchten Uebergangsgleichungen für φ''' und φ'' gefunden.

Wir stellen auch gleich die entsprechenden Bedingungen für die adjungierte Aufgabe daneben. Sie lautet nach (6):

$$\psi^{IV} - 2\,\alpha^2 \psi'' + \alpha^4 \psi$$
$$+ S\{(U - c)(\psi'' - \alpha^2 \psi) + 2\,U'\psi'\} = 0 \quad (6');$$

Hier kann man für den Grenzübergang wie oben wieder die Glieder mit α^2 fortlassen und ein Glied $U\psi''$ zweckmäßig zufügen, so daß die verkürzte Gleichung entsteht:

$$\psi^{IV} + 2\,S[U\psi'' + U'\psi'] = 0 \quad . \; . \quad (41),$$

also durch Integration::

$$\psi''' + 2\,SU\psi' = \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \quad (42)$$

bezw. in der Grenze:

$$\psi_+''' - \psi_-''' = - 2\,S(U_+ - U_-)\psi' \; . \quad (43).$$

Dagegen ergibt die nochmalige Integration von (42):

$$\psi_+'' - \psi_-'' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44),$$

d. h. Stetigkeit auch von ψ''.

Nach Festsetzung dieser Unstetigkeitsbedingungen für die höheren Ableitungen der Funktionen φ und ψ gilt wie in Nr. 3 der Greensche Satz. Denn man erhält jetzt an Stelle von (9), nach Berücksichtigung der Randbedingungen und indem man das Zeichen Σ auf die Gesamtheit der Unstetigkeitsstellen bezieht, deren Argumente in φ und ψ einzusetzen sind:

$$\int_{-1}^{+1} [\psi\, A(\varphi) - \varphi\, A(\psi)]\, dy + \Sigma\, \{\psi(\varphi_+''' - \varphi_-''')$$
$$- \varphi(\psi_+''' - \psi_-''') - \psi'(\varphi_+'' - \varphi_-'')$$
$$+ \varphi'(\psi_+'' - \psi_-'')\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (45),$$

[1]) Ergänzung zu der unter gleichem Titel auf S. 232 ds. Bandes erschienenen Arbeit. Auf diese beziehen sich die Rückverweisungen und die Formelnummerierung schließt hier an.

[2]) Nachrichten der Ges. der Wiss., Göttingen. Math. phys. Kl. 1917.

[3]) Vergl. Fußnote 1 und 2 auf S. 243.

$$\int_{-1}^{+1} [\psi B(\varphi) - \varphi B^*(\psi)]\, dy + \Sigma \{(U_+ - U_-)(\psi\varphi' - \varphi\psi') - (U_+' - U_-')\psi\varphi\} = 0 \quad . \; . \; . \; (45').$$

Addiert man diese beiden Identitäten und berücksichtigt dabei in den Summengliedern die oben abgeleiteten Beziehungen (39), (40), (43), (44), so bleiben nur die Integrale übrig, und der Greensche Satz behält die unveränderte Form:

$$\int_{-1}^{+1} \{\psi [A(\varphi) + S B(\varphi)] - \varphi [A(\psi) + S B^*(\psi)]\}\, dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (46).$$

Alles folgende kann nun übertragen werden, wobei insbesondere die Zerlegung der Formen in »selbstadjungierte« und »gegenadjungierte« auch mit Einschluß der in den Unstetigkeitsbedingungen auftretenden Formen auszuführen ist. Es erübrigt sich daher vom Standpunkt der allgemeinen Theorie, die geknickten und unstetigen Profile gesondert zu behandeln, da in der hier abgeleiteten Fassung die früheren einschränkenden Voraussetzungen nicht mehr enthalten sind.

Breslau, Oktober 1926.

F. Noether. 726

Ueber eine Vorrichtung zum Zeichnen von Ellipsen. Im folgenden soll eine Vorrichtung zum exakten Zeichnen von Ellipsen beschrieben werden, die in theoretischer Hinsicht wohl deshalb von Interesse sein dürfte, weil sie im Wesentlichen auf einer eigenartigen Verwendung der logarithmischen Spirale beruht und damit einen Zusammenhang dieser interessanten Kurve mit der Ellipse aufdeckt.

Descartes definierte die logarithmische Spirale auf Grund der Gleichung:

$$s = a \cdot r \quad . \; . \; . \; . \; . \; (I),$$

worin r der von einem Punkt o ausgehende Radiusvektor, s die Länge des Kurvenbogens und a eine Konstante ist. Bezeichnet man den (konstanten) Winkel zwischen der Kurventangente und dem Radiusvektor mit μ, so ist[1])

$$a = \sec \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; (II).$$

Die durch Gl. (I) ausgedrückte Fundamentaleigenschaft der Kurve führt nun zu folgenden Ueberlegungen:

Wir betrachten einen Zylinder Σ, dessen Normalschnitt eine logarithmische Spirale ist, und bezeichnen seine durch den Punkt o gehende, asymptotische Erzeugende mit A. Dieser Zylinder wird mit einer Drehfläche Φ zum Schnitt gebracht, deren Rotationsachse in A liegt. Bezeichnen wir diese Schnittkurve mit K, so hat ein beliebiger Punkt p von K nach Gl. (I) von A einen Normalabstand, der der Bogenlänge des durch p gehenden Normalschnitts von Σ gemessen zwischen A und p proportional ist. Mit anderen Worten: Die genannte Bogenlänge ist dem Radius des durch p gehenden Parallelkreises von Φ proportional. Dabei ist nach Gl. (II) das Aenderungsverhältnis $= \sec \mu$.

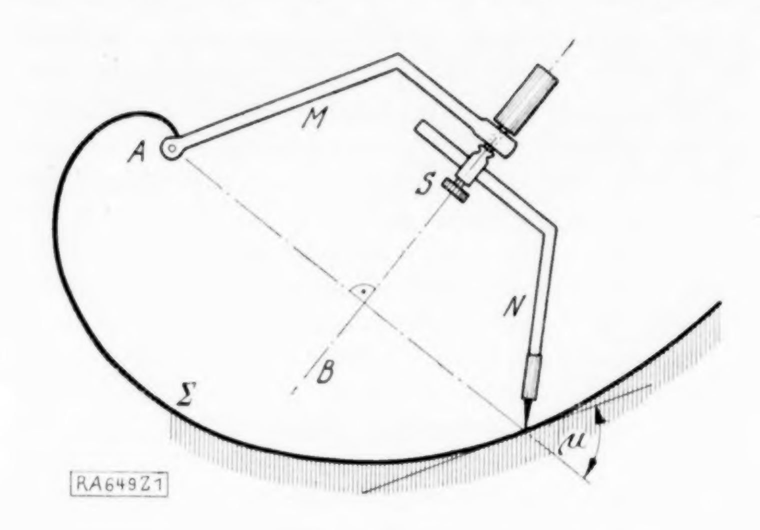
Verebnet man diesen Zylinder, so geht A in eine Gerade A^e und K in eine ebene Kurve K^e über. Die Punkte p^e von K^e besitzen dann nach Obigem von A^e Entfernungen, die aus den Radien der durch die p gehenden Parallelkreise von Φ durch Multiplikation mit $\sec \mu$ erhalten werden. Somit ist das Ergebnis:

Schneidet man einen Zylinder Σ dessen Normalschnitt eine logarithmische Spirale ist, mit einer Drehfläche, deren Achse in die asymptotische Erzeugende A von Σ fällt, und verebnet man den Zylinder, so geht die Schnittkurve in eine Kurve über, die man aus dem Meridian von Φ dadurch erhalten kann, daß man die Radien der Parallelkreise mit $\sec \mu$ multipliziert. μ ist dabei der konstante Winkel, den der Zylinder mit den Ebenen durch A einschließt.

Wird Φ insbesondere als Kugel mit dem Radius l und der Mitte auf A gewählt, so ist demnach K^e eine Ellipse mit den Halbachsen $l . \sec \mu$ und l. Hätte man daher ein (etwa aus Blech verfertigtes) Modell eines Zylinders Σ zur Verfügung, so könnte man beliebig große Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $\sec \mu : 1$ mit Hilfe eines gewöhnlichen Zirkels auf folgende Weise zeichnen: Man spanne über Σ ein Blatt Papier, setze mit der Zirkelspitze in der Achse A ein und beschreibe mit einer bestimmten Zirkelöffnung auf dem Blatt eine Kurve K. Breitet man dann das Blatt wieder in eine Ebene aus, so ist K eine exakte Ellipse. Das Modell müßte allerdings so beschaffen sein, daß es die nötige freie Bewegung des Zirkels ermöglicht. Aber auch dann wäre es unmöglich, auf diese Weise eine vollständige Ellipse zu zeichnen, da das Papierblatt bis zur asymptotischen Erzeugenden von Σ aufgewickelt werden müßte und auch dann nur eine Hälfte der Ellipse gezeichnet werden könnte.

Um den Zylinder Σ zum Zeichnen von ganzen Ellipsen verwerten zu können, kann man jedoch die Drehfläche Φ als Torus (Kreisringfläche) annehmen. Statt des Zirkels benötigt man dann einen Mechanismus, der es ermöglicht, eine Zeichenspitze in der Oberfläche eines Torus beliebig herumzuführen. Ein solcher Mechanismus ist einfach herzustellen. Er müßte aus einem Metallstück M bestehen, das an der Achse A von Φ derart befestigt ist, daß es nur die Drehungen um A ausführen kann, und aus einem Stück N mit dem Schreibstift, das mit M so verbunden ist, daß es nur um eine zu A senkrechte Achse B gedreht werden kann (siehe die Abb.!). Die Spitze des Stiftes muß dabei so angeordnet sein, daß ihre Verbindungsebene mit A in jeder Lage von N zu B senkrecht steht.

[1]) Vergl. z. B. G. Loria, Ebene Kurven, deutsch von F. Schütte, 2. Aufl., II. Bd. (1911), S. 60 ff.



Nennen wir den Ort der Mittelpunkte der Meridiankreise den Mittenkreis des Torus, und bezeichnen wir den Radius der Meridiankreise mit m, so folgt aus obigem Satz, daß K^e auch in diesem Fall eine Ellipse mit den Halbachsen $m . \sec \mu$ und m ist. Wird N so ausgeführt, daß die Stiftspitze in beliebigen Abständen von B fixiert werden kann[2]), so wird es auch immer möglich sein, jede (nicht zu große) Ellipse vom Achsenverhältnis $\sec \mu : 1$ auf die oben geschilderte Weise vollständig zu zeichnen.

Für das praktische Zeichnen ist dieses Verfahren natürlich kaum zu brauchen, da man für jedes andere Achsenverhältnis einer Ellipse — entsprechend den verschiedenen Werten von μ — einen anderen Zylinder Σ benötigte. Es wäre nur noch zu untersuchen, ob sich die geschilderte Vorrichtung nicht zu einem brauchbaren Ellipsenzirkel umgestalten ließe. Dem Verfasser scheint dies indessen — im Hinblick auf die zahlreichen, bereits vorhandenen Apparate zum Zeichnen von Kegelschnitten[3]) — nicht sonderlich erstrebenswert.

Wien. Jos. Leop. Krames. 649

[2]) Eine derartige Ausführungsform ist in der Abbildung angedeutet (siehe Schraube S).

[3]) Vergl. Enz. der math. Wissensch., Bd. III 2 (Art. III C 1), F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, I, Nr. 45.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin SW 19, Beuthstr. 7, zu beziehen.)

Dr.-Ing. H. G. **BADER**, Flugzeugbaukunde. Eine Einführung in die Flugtechnik. Mit 94 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. 121 S. Preis 4,80 M; geb. 5,40 M.

Die Zahl flugtechnischer Lehrbücher ist keine allzu große. Es ist insbesondere nicht leicht, ein Buch zu finden, das diesen Gegenstand seiner neuzeitlichen Entwicklung entsprechend behandelt und doch gleichzeitig nicht zu umfangreich ist. Bader ist es mit seinem Büchlein Flugzeugbaukunde, das aus der Niederschrift seiner das gesamte Gebiet der Flugtechnik behandelnden Vorlesung entstanden ist, gelungen, diesem Mangel abzuhelfen.

In dem Kapitel I Der Luftverkehr wird in dem einleitenden Abschnitte über »Geschwindigkeit« dargelegt, daß das Flugzeug seine Hauptaufgabe in der Verwendung für Post und Reise zu erblicken hat, wenn es sich um schnellste und gleichzeitig zuverlässige Einzelbeförderung handelt. Auf die Kriegsaufgaben des Flugzeuges wird nicht eingegangen und es werden in den späteren Abschnitten, die über den Aufbau des Flugzeuges handeln, keine Kriegsflugzeuge, sondern lediglich Reiseflugzeuge besprochen. In dem Abschnitt »Zuverlässigkeit« wird mit Recht festgestellt, daß die die Zuverlässigkeit begrenzenden Faktoren hauptsächlich außerhalb des Flugzeuges liegen. Mit Vervollkommnung der Bodenorganisation und weiterer Entwicklung des Instrumentenwesens wird auch die Zuverlässigkeit des Luftverkehrs zunehmen. Zur Vermeidung der Ermüdung des Führers schlägt Bader vor, diesen in einem abgeschlossenen Raume unterzubringen. Die Unterbringung des Führers kann jedoch nur nach den Gesichtspunkten des Gefühles für das Flugzeug, der freien Sicht und der Motorüberwachung geschehen.

Recht interessant sind die verschiedenen Wege, die der Verfasser einschlägt, um zu einer Darstellung der Wirtschaftlichkeit des Luftverkehrs zu gelangen. Einmal wird der Flugpreis als Vielfaches des Brennstoffverbrauches ausgedrückt. Aelteren amerikanischen Luftverkehrserfahrungen entspricht der Faktor 7. Der Anteil der Brennstoffkosten am Flugpreis dürfte aber heute einen weit kleineren Bruchteil ausmachen. Das andere Mal versucht der Verfasser formelmäßig die Bedingungen aufzustellen, unter denen ein Luftverkehr am wirtschaftlichsten ist. Er findet, daß diese bei gegebener Flugstrecke bei einer ganz bestimmten Geschwindigkeit liegt, und daß zu kleine Flugstrecken nicht wirtschaftlich arbeiten können. Die gegebene Formel berücksichtigt sehr gut alle für die Wirtschaftlichkeit des Luftverkehrs maßgebenden Faktoren.

Das Kapitel II Luftkräfte vermittelt die wichtigsten Begriffe neuzeitlicher Strömungslehre. Ohne zu viele Formeln zu bringen, wohl gerade deswegen, gelingt es dem Verfasser, den Leser zu zwingen, sich förmlich »in die Strömung hineinzudenken«. In dem Abschnitt »Form und Reibungswiderstand« werden die Begriffe der reibungsfreien Strömung, die Beziehungen zwischen Druck- und Geschwindigkeitsgrößen- und Richtungsänderung, daraus folgernd der Begriff des Wirbels und schließlich die Begriffe des Reibungswiderstandes und der Grenzschicht kurz aber klar erläutert. Der zweite Abschnitt behandelt das Zustandekommen des Auftriebes durch Ueberlagerung einer Zirkulationsströmung mit einer Parallelströ-

mung. Hierbei erscheint die Drucksteigerung am Boden vor dem Flugzeug als Erklärung des Zustandekommens der Aufwärtsströmung vor einem Tragflügelprofil ungeeignet. Eine Erklärung durch den überlagerten Wirbel wäre auch hier am Platze gewesen. Der Abschnitt »Induzierter Widerstand« ist ein Auszug, der heute fast jedem Flugtechniker geläufigen hauptsächlich von Prandtl entwickelten Tragflügeltheorie. Die Formeldarstellung der Luftkräfte hätte durch eine kurze Aufstellung der Formelzeichen und Anwendung der Göttinger Formeln für die Beiwerte an Klarheit gewinnen können.

Das Kapitel III Flugwerk entwickelt den Aufbau des Flugzeuges, wobei von den Gesichtspunkten der Art des Ausgleichs des Höhenmomentes und der Motorenanordnung ausgegangen wird. Auf das mehrmotorige Flugzeug und die Anordnung der Luftschraube als Druckschraube wird näher eingegangen. Der Abschnitt »Ausführung« zeichnet sich durch ein sehr gediegenes Bildmaterial von Metall- und Holzkonstruktionen aus. Auch auf Festigkeitsfragen ist kurz eingegangen.

In dem Kapitel IV Triebwerk wird in dem Abschnitte »Schrauben« eingangs die Luftschraube als reine Strahlmaschine betrachtet. Bei dieser wird ein Geschwindigkeitssprung in achsialer Richtung angenommen. Das Schraubenblatt als Tragflügel aufgefaßt, erzeugt eine Abwärtsgeschwindigkeit senkrecht zur Bahnkurve des Blattes. Durch dieser Ueberlegung entsprechenden Rechnungsgang gelangt Bader zur Einführung des Drehimpulses und damit zu einer Abänderung der einfachen Formeln der Strahltheorie für Wirkungsgrad und Belastungsgrad. Den Entwurf von Luftschrauben wird an zwei Beispielen durchgeführt. Es folgt eine Leistungsbilanz des Blattelementes, in der u. a. auch auf den Einfluß der Reibung auf den Drehimpuls hingewiesen wird, mit dem Bader die Wirtschaftlichkeit des im Schiffsbau verwandten Kontra-Propellers erklärt. Das Kapitel über Luftschrauben verdient besondere Aufmerksamkeit.

In dem Abschnitt über »Motoren« wird die Verwendungsmöglichkeit verschiedener Wärmekraftmaschinen (Dampf- und Verbrennungsturbinen und Kolbenmaschinen) an Hand von PV-Diagrammen erörtert und anschließend die Leistungserhöhung bei Flugmotoren mit Vorverdichtung besprochen. Dieser rein theoretisch gehaltene Abschnitt geht leider nicht auf jetztzeitliche Fragen des Flugmotorenbaues ein; z. B. werden die Fragen der Luft- oder Wasserkühlung, des Tragdeckkühlers, des Einflusses des Motors auf die Flugzeugpolare und ähnl. nicht gestreift, trotzdem diese für die Gestaltung des Flugzeuges recht wesentlich sind.

In dem letzten Kapitel V Das Flugzeug werden in dem Abschnitt über Flugleistungen Formeln über Steigzeit und Gipfelhöhe von Motorflugzeugen gegeben. Auf das Segelflugzeug kommt der Verfasser ebenfalls zu sprechen; wobei allerdings bei der Betonung eines geringsten induzierten Widerstandes als Konstruktionsrichtlinie nicht vergessen werden darf, daß auch die Fluggeschwindigkeit eine bestimmte Grenze nicht überschreiten soll. Der letzte Abschnitt über »Flugeigenschaften« enthält bei dem geschilderten Trudelvorgang insofern einen Irrtum, als bei der Drehung des Flugzeuges um eine senkrechte Achse diese nicht mit der Längsachse des Flugzeuges übereinstimmt, sondern schräg zu ihr liegt.

Wenn auch verschiedene Punkte teils genauer, teils verständlicher dargestellt werden konnten, so hat doch der Zweck des Buches, eine Einführung in das gesamte Gebiet der Flugtechnik zu geben, hierunter nicht gelitten. Trotz gedrungener Darstellung, die übrigens durch klare Erläuterungen unter den Bildern sehr gewonnen hat, ist auch auf eine Menge von Einzelfragen eingegangen worden, so daß das Buch nicht nur dem angehenden Ingenieur, sondern auch dem Fachmann bestens empfohlen werden kann. H. Muttray. 684

Dr.-Ing. A. **NÁDAI,** Privatdozent an der Universität Göttingen. Die elastischen Platten. Die Grundlagen und Spannungen sowie die Anwendungen der Theorie der ebenen zweidimensionalen elastischen Systeme auf praktische Aufgaben. Mit 187 Abb. im Text und 8 Zahlentafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. VIII + 326 S. Preis geb. 24 M.

An den großen Fortschritten, welche die Theorie und die Versuchstechnik der elastischen Platten in den letzten Jahrzehnten gemacht hat, ist Herr A. Nádai mit zahlreichen in verschiedenen Zeitschriften verstreuten Veröffentlichungen sehr wesentlich beteiligt.

Eine Monographie von seiner Feder, welche nicht nur seine eigenen Arbeiten zusammenfaßt, sondern überhaupt den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse der allgemeinen Theorie, der numerischen Zusammenhänge und der Versuchsergebnisse darstellt, ist sowohl im Interessse der Anregung zu weiteren Forschungen, als auch der Anwendung in der Bau-, Maschinen- und Schiffbautechnik mit Freude zu begrüßen. Daß die genauere Durchsicht des Buches diese Erwartungen in hohem Maße erfüllt, möge die folgende Inhaltsübersicht andeutungsweise zeigen.

Der erste Hauptabschnitt bringt von neuzeitlichen Gesichtspunkten aus einen Abriß der Elastizitätsgesetze und der Bruchkriterien, leitet die Gleichgewichtsbedingungen der Spannungsmomente, ihre Darstellung durch die Verschiebungen und die Differentialgleichung der Plattenbiegung ab für den Fall, daß die Durchbiegungen klein gegen die Dicke und diese klein gegen die Seitenabmessungen sind. Sodann folgt die Aufstellung der Grenzbedingungen, insbesondere die berühmte Kirchhoffsche Einführung der Ersatzscheerkräfte für die kombinierte Wirkung der Randtorsionsmomente und der Scheerkräfte. Hier, wie auch übrigens bei anderen Autoren, müßte allerdings nicht nur die statische Möglichkeit, sondern auch die mathematische und die physikalische Notwen-

digkeit gerade dieser Randbedingungen noch deutlicher gemacht werden[1]).

Zwei Schlußbeispiele über Biegungsmessungen des Verfasssers und über einfache Spannungszustände von dicken Platten bestätigen in gewissen Grenzen die Richtigkeit der vorhergehenden elementaren Ansätze.

Der zweite Abschnitt enthält nun die Integration jener Differentialgleichung der dünnen Platte und zwar in den Fällen der Kreisplatte, der Plattenstreifen und der rechteckigen Platten mit stetiger und mit Einzelbelastung. Besonderer Wert ist auf die Integration für Einzelbelastung mit Hilfe schnell konvergierender Fourierreihen gelegt, die sich auf eigene Arbeiten des Verfassers stützt. Aber auch die Lösungen von Navier, M. Lévy, Estanave und die Theorie der Pilzdecken von Lewe werden ausführlich gebracht. Man findet dort ferner kurze und klare Erläuterungen über Biegungsschwingungen, die Beziehung zu den Integralgleichungen und die Entwicklung von Belastungszuständen nach Orthogonalfunktionen. Man findet ferner die Lösung für die rechtwinklige, frei aufliegende Dreieckplatte, die eingespannte gleichmäßig belastete Rechteckplatte und die auf nachgiebigem Grunde gelagerte (Fundament)platte. Schließlich Versuchsergebnisse mit kreisförmigen Glasplatten.

Der sich nun anschließende etwas kürzere Abschnitt III gibt eine Darstellung der Rungeschen und Marcusschen Arbeiten über die näherungsweise Integration von Differentialgleichungen durch Verwandlung in Differenzengleichungen, eine Methode, die besonders in analytisch schwierigen Fällen ihre Dienste tun wird[2]).

Auch der Abschnitt IV, der die mathematisch verwandten Probleme des in verschiedener Weise belasteten Halbraumkörpers behandelt, ist zwar etwas kürzer gefaßt, bringt aber eine sehr nützliche Zusammenfassung der einfachsten Lösungsbeispiele, insbesondere derjenigen von Michell.

Es folgt nun der Abschnitt V über die ebenen Spannungszustände der parallel ihrer Mittelebene belasteten, dünnen Platten insbesondere über die kritischen Knickungsbelastungen und Ausbeulungszustände. Die Literatur über rechteckige und kreisförmige Platten und Platten-

---

[1]) Bei Kirchhoff folgt sie ganz formal aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, wenn darin die Formänderungsarbeit als quadratische Form der Spannungsmomente angesetzt wird, und zwar durch die Glieder an den Grenzen.

Kelvin und Tait haben gezeigt, daß es nur für einen sehr schmalen Streifen am Rande unter den Voraussetzungen der elementaren Biegungstheorie wesentlich ist, wie sich die Ersatzscheerkräfte p_n' in die Scheerkraft p_n selbst und die Scheermomentgradienten $\frac{\partial m_{ns}}{d s}$ teilen.

Love betont, daß die Gleichgewichtsbedingungen sowohl im Innern als am Rande nirgends die Scheerkräfte und Scheermomente für sich, sondern nur in der Zusammenfassung $p_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}$ enthalten.

Diese Feststellungen scheinen nun noch nicht deutlich und vollständig genug zu sein. Z. B. würde sonst nicht von vielen ernsthaften Leuten behauptet werden, daß in den Ecken einer rechteckigen, ringsgestützten Platte notwendig Einzelkräfte auftreten müßten, wenn dort nicht das Scheermoment $m_{ns} = 0$ ist.

Ich würde mir eine deutlichere und vor Fehlschlüssen bewahrende Formulierung ganz kurz etwa, wie folgt, denken:

Bei dem gewählten Grade der (ersten) Annäherung der Plattenbiegung, bei welchem das Schiefziehen und Verwölben der Querschnitte d. h. der unmittelbare Einfluß der Scheerspannungen senkrecht zur Mittelebene auf die Durchbiegung vernachlässigt wird, verzichtet man notwendigerweise, um einen Widerspruch zu vermeiden, auf die Berechnung der Scheerkräfte p_n aus der Formänderung und erhält aus der Formänderung nur die inneren Scheermomente m_{ns}.

Wegen der oben genannten Eigentümlichkeit der Gleichgewichtsbedingungen und wegen des St-Venantschen Prinzips brauchen nun die äußeren Scheermomente den inneren durch $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ bestimmten am Rande nicht gleich zu sein, sondern hängen von der Art der Stützung ab.

Daraus kann man folgern, daß, wenn man längs des ganzen Randes das Auftreten von äußeren Randscheermomenten wirklich hindert, z. B. durch einen vollkommen freihen Rand, eine Unstetigkeit des inneren Randscheermoments m_{ns} sich notwendig übersetzen muß in ein Unendlich werden der äußeren Scheerkraft p_n da aus $\left(p_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}\right)_i = \infty$ und $(m_{ns})_a = 0$ notwendig $(p_n)_a = \infty$ folgt. Dies ist auch der Fall bei dem von Herrn Nádai behandelten Falle der nur in ihren Eckpunkten durch Einzelkräfte belasteten und gestützten rechteckigen Platte.

Wenn aber an irgend einem Teil des Randes äußere Randscheermomente der Stützung nicht ausgeschlossen sind, dann braucht eine Unstetigkeit des inneren Randscheermoments in irgend einem Randpunkt oder, was dasselbe bedeutet, eine Ecke des Randes auch keine Einzelkräfte $[(p_n)_a = \infty]$ daselbst zu bedingen. Durch eine zweiseitige Stützung wie im Navierschen Fall der rings positiv und negativ gestützen Rechteckplatte ist nun aber das Auftreten solcher äußeren Randscheermomente z. B. durch die Reibung längs den Stützkanten oder durch das notwendige Ueberhängen des Randes nach außen in Wirklichkeit durchaus zu erwarten. Und dadurch wird die schon an sich unwahrscheinliche Ansetzung von unendlich großen, punktförmigen Stützdrucken in den Ecken eines rings gestützten Randes hinfällig.

Dagegen darf man aus dem Verhalten z. B. aus dem Abheben der Ecken einseitig gestützter Platten, welche ja von der Theorie meines Wissens noch garnicht behandelt sind, nur sehr wenig schließen.

[2]) Man vermißt übrigens eine Stellungnahme des Verfassers zu den Näherungsformeln von Marcus, die den neuen preußischen Betonbauvorschriften zugrunde gelegt sind.

streifen ist hier sehr vollständig und ausführlich wiedergegeben. Hier kann sich der Verfasser bei der Besprechung der kreisförmigen Platten und der Wärmespannungen wieder auf eigene, sinnreiche Behandlungsmethoden stützen.

Die Schlußkapitel dieses Abschnitts über die Ableitung der Knickbedingungen und die näherungsweise Berechnung der Knicklasten mit Hilfe der Formänderungsarbeiten der Biegung und der Reckung nach den Ansätzen von Bryan, Ritz und Timoschenko bringen das wichtige Problem des Ueberganges ebener Spannungszustände in räumliche und die bisher gewonnenen Lösungen. Ich habe an anderer Stelle ausgesprochen und begründet, daß die bisherigen Lösungen zwar durchaus richtig, die bisherigen Ableitungen jedoch verbesserungsbedürftig sind [1]).

Der VI. und VII. Abschnitt behandeln schließlich zwei sehr wichtige Vervollständigungen der Theorie, die sich bis dahin auf so dünne Platten von so geringer Durchbiegung beschränkt hatte, daß die Spannungszustände reiner Biegung und reiner Zerrung in der Mittelebene der Platte unabhängig voneinander behandelt werden können, und welche über die Fortpflanzung der Belastung vorausgesetzt hatte, daß die Normaldrucke der Schichten parallel der Mittelebene aufeinander vernachlässigbar waren.

Nach dem Vorgange von Kármán zeigt nun der Verfassser, wie durch ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen in zweiter Näherung die beiden Zustände der Zerrung und der Biegung bei größeren Durchbiegungen miteinander gekoppelt werden müssen, und wie man die nicht ganz einfache Integration für kreisförmige Platten mit verschiedener Stützung durchführen kann. Auch hier führt der Verfassser seine Theorie durch bis zum Vergleich mit eigenen und Föpplschen Versuchen mit kreisförmigen Stahlblechen, und kann bei genügender Berücksichtigung der Stützungsbedingungen befriedigende Uebereinstimmung feststellen, verschweigt allerdings auch nicht die Tammannsche Feststellung des nicht ausmerzbaren Einflusses der Walzanisotropie auf die Schwingungsknotenlinien.

Den letzten Teil bildet nun, wie oben gesagt, die Theorie der dicken Kreisplatten. Die Lösung wird auf der Weberschen Methode der Partikularlösungen des Halbraumes aufgebaut; es wird gezeigt, wie die Oberflächenspannungen der Belastung sich durch die Plattendicke hin fortpflanzen, wie die Biegungs- und Schubspannungen von der linearen bzw. quadratischen Verteilung abweichen, wie die Durchbiegungen durch die Schubspannungen erhöht werden und schließlich, daß die Lösung für kleine Plattendicke asymptotisch in die frühere (Kirchhoffsche) Lösung übergeht.

Ein Anhang bietet schließlich noch einen kurzen historischen Abriß und ein Literaturverzeichnis.

[1]) **Diese Zeitschr.** Bd. 5 (1925), **Energiekriterium der Knicksicherheit** S. 475 bis 478.

Die obige Uebersicht läßt die Voraussage berechtigt erscheinen, daß das Nádaische Buch, das so viel Neues in übersichtlicher mit Zahlenbeispielen und experimentellen Vergleichen belegter Form enthält, die weiteste Benutzung und Weiterverbreitung in rein wissenschaftlichen und wissenschaftlich technischen Kreisen finden wird. Reißner. 691

S. TIMOSHENKO, formerly professor of mechanics in Kiew and Petrograd Polytechnical Institutes, research Engineer and J. M. LESSELS, B. Sc. A. M. I. Mech. E., mechanical Engineer, research Departement Westinghouse electric and manufactoring company, Applied Elasticity. — Westinghouse technical night school press, East Pittsburg, Pa. 1925. XXI + 544 S.

Der durch seine ausgezeichneten Arbeiten über Elastizität wohlbekannte Verfasser hat hier mit I. M. Lessells, einem Ingenieur der Westinghouse electric C. eine vortreffliche Darstellung der Hauptaufgaben der technischen Elastizitäts- und Festigkeitslehre der Oeffentlichkeit übergeben, die verdient in weiteren Kreisen bekannt zu werden. Der erste der beiden Verfasser, der durch seine auch in den deutschen Fachzeitschriften des öfteren erschienenen Arbeiten einen hervorragenden Anteil an der Lösung der neueren Aufgaben der Elastizitätslehre hat, bemerkt im Vorworte des Buches, daß die leitenden Kreise der Industrie die Bedeutung wissenschaftlicher Untersuchungen für die Lösung von technischen Aufgaben erkannt haben. Während der Ingenieur oder Erfinder der Vergangenheit Zeit genug hatte, die Lösung einer technischen Aufgabe durch langwieriges Probieren zu suchen und die alten Konstruktionen und Erfindungen alle Stadien des Versuches erst durchmachen mußten, bis sie in der Ausführung Fuß fassen konnten, verlangt die Industrie heute rasches Handeln. Ihr fehlen die Mitarbeiter, die über das durchschnittliche Maß hinaus in einem Sonderfache Kenntnisse aufweisen können. Es sei nur an die schwierigen Aufgaben der neueren Elastizitäts- und Festigkeitslehre, der Hydro- und Aerodynamik erinnert, an die des Leichtbaus oder der Werkstoffeigenschaften. Das Buch von Timoschenko und Lessels will dem weiterstrebenden Ingenieur ein Mittel zur mechanischen Behandlung seiner Probleme in die Hand geben.

Das Buch zerfällt in einen analytischen Teil mit 11 Kapiteln und in einen experimentellen Teil mit 7 Kapiteln. Aus dem Inhalte des ersten Teiles seien erwähnt: die Analyse der Spannungszustände (Zug-, Druck-, Biegungs-, Drehungsbeanspruchung), die statisch unbestimmten Systeme, die Energiesätze, die Biegung der Stäbe, die auf einer elastisch nachgiebigen Unterlage aufruhen, die Stabilitätsprobleme, zusammengesetzte Festigkeit, die Theorie der krummen Stäbe, die Spannungszustände von elastischen Platten und schwingenden Systemen. Aus dem Inhalte des zweiten Teiles seien erwähnt: die Beschreibung des Zug- und des Druckversuches, der spröden und bild-

samen Zustände der Metalle, der Bruchvorgänge, der Festigkeitseigenschaften des Stahles in Abhängigkeit von der Temperatur, von der chemischen Zusammensetzung, die Darstellung der Zeitgesetze der Dehnung, der Härte und der Festigkeitstheorien.

Die Verfasser beschäftigen sich unter anderm eingehend mit den neueren Aufgaben über die Knickung gegliederter Stäbe, dünnwandiger Flachstäbe und Walzwerksprofile, mit der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken, mit der Gestalt der Formänderungskurven für die wichtigsten Metalle und mit ihrem Verhalten unter langsam und rasch wechselnder Belastung.

Eine Eigentümlichkeit des Buches ist seine knappe und sehr klare Darstellungsweise der Grundgedanken. Von den Rechnungen, die in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen fallen, werden nur die Ergebnisse in sorgfältiger Auswahl mitgeteilt. Das Buch berücksichtigt die neuesten deutschen und englischen Arbeiten.

Göttingen, den 16. Juni 1926.

A. Nádai. 681

HANS LORENZ, Technische Mechanik starrer Gebilde. Zweite vollständig neubearbeitete Auflage der Techn. Mechanik starrer Gebilde. Zweiter Teil. Mechanik räumlicher Gebilde. Mit 144 Textabbildungen. Lehrbuch der Technischen Physik. 1. Band. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VIII + 294 S. Preis geb. 21 M.

Dem ersten, die Mechanik ebener Systeme umfassenden Teilband, der in dieser Zeitschrift besprochen wurde[1]), folgt jetzt ein etwa 300 Seiten starker Abriß der Mechanik räumlicher Systeme. Die Kenntnis des ersten Teiles wird beim Leser im allgemeinen vorausgesetzt. Der Verfasser bevorzugt in etwas höherem Maße als es sonst in der Technik üblich ist, die analytische Ableitungsweise gegenüber der geometrischen. Auch von Vektorbegriffen und Vektorrechnung wird nur verhältnismäßig wenig Gebrauch gemacht, offenbar, weil die unmittelbare Anwendbarkeit der Formeln für Zahlenrechnungen gewahrt bleiben soll. In den Kapiteln über Kinematik und Statik wäre eine etwas größere Anpassung an moderne Auffassungen möglich gewesen, wie es überhaupt ein Kennzeichen des Buches zu sein scheint, einen Lehrgang der Mechanik etwa nach dem Stande um 1900 zu geben. Es versteht sich nach Titel und Zweck des Werkes von selbst, daß auf die technischen Anwendungen ausführlich eingegangen wird, so auf den Massenausgleich mehrkurbeliger Maschinen, auf Kreiselkompaß u. dergl. Nicht ganz einverstanden weiß sich der Referent mit den Ausführungen des letzten Kapitels über die Variationssätze der Mechanik und daran anschließende Fragen.

Mises. 733

J. NIKURADSE, Göttingen. Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. Mit 51 Abb. und 16 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Heft 281. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1926. 44 S. Preis 6 M.

FRITZ **DÖNCH,** Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Oeffnungswinkeln. Mit 28 Abb. und 20 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Heft 282. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1926. 58 S. Preis 7,50 M.

Professor Dr.-Ing. E. **SCHRENK** in Karlsruhe. Versuche über Strömungsarten, Ventilwiderstand und Ventilbelastung. Mit 109 Abb. und 19 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Heft 272. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1925. 62 S. Preis 10 M.

Die beiden ersten dieser drei hydrodynamischen Forschungshefte bringen die Dissertationen, die die Verfasser im Prandtlschen Institut in Göttingen ausgeführt haben. Nikuradse untersucht die Geschwindigkeitsverteilung in Kreis-Rohren und in Rohren von Rechtecks- und Dreiecksquerschnitt. Er findet eine durchwegs gute Uebereinstimmung mit dem sogenannten $^1/_7$-Potenzgesetz bei voll ausgebildeter turbulenter Strömung. Die Untersuchung eines rechteckigen offenen Kanals hat gezeigt, daß die Geschwindigkeitsverteilung über ein mittleres Querprofil des geschlossenen Vierecks ungefähr einem Geschwindigkeitsprofil im offenen Kanal entspricht, das sich etwas unterhalb der Oberfläche befindet.

Die Arbeit von Dönch knüpft an die beiden älteren von Hochschild und Kröner (vgl. diese Zeitschr. 1 1921, S. 67 bis 68) an. Der Zweck war hauptsächlich der, die Kenntnis der divergenten Strömung im turbulenten Bereich zu vertiefen. Die Untersuchungen wurden in einem Luftkanal von rechteckigem Querschnitt mit verstellbaren Seitenwänden vorgenommen. Eine theoretische Ueberlegung liefert in Uebereinstimmung mit den Versuchen, Anhaltspunkte zur Berechnung des Verlustfaktors und der Austauschgröße des Impulses. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand folgt hier einem $^1/_8$-Potenzgesetz.

Die Schrenksche Arbeit, die im Maschinenlaboratorium von Prof. Gutermuth in Darmstadt ausgeführt wurde, sucht die Bewegung durch die Kanäle eines geöffneten Ventils experimentell näher zu verfolgen. Es liegt in der Natur dieser Aufgabe, daß es sich mehr um eine Sammlung von Einzelbeobachtungen als um eine abgeschlossene Erklärung handeln kann. Immerhin werden Anhaltspunkte für die Ventilkonstruktion gewonnen, die einer Verminderung der schädlichen Widerstände dienen soll.

Mises. 732

Festschrift anläßlich des 100 jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe. VDI-Verlag G. m. b. H. Berlin 1925. IV + 542 S. Preis 30 M.

[1]) Vergl. diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 86/87.

In einem stattlichen schön gedruckten Bande legt die Technische Hochschule Karlsruhe etwa 35 wissenschaftliche Abhandlungen vor, die von Mitgliedern ihres Lehrkörpers verfaßt sind und ein bemerkenswertes Zeugnis für die Intensität der Forschungstätigkeit an dieser Hochschule bilden. Für die Leser unserer Zeitschrift kommen namentlich die folgenden Arbeiten in Frage: Baldus, Die Gestalt eines im Fluge frei herabhängenden, beschwerten Drahtes; Heun, Grundlagen der modernen Mechanik; K. v. Sanden, Der kreisrunde Ueberfall als Meßwehr; Schleicher, Ueber Kreisplatten auf elastischer Unterlage; Böß, Untersuchungen über zeitlich veränderliche Wasserbewegungen in offenen Gerinnen; Brauer, Rollfedergetriebe; Lindner, Berechnung der beim Lochen auftretenden Schubspannungen; Nusselt, Die Wärmeübertragung an Wasser im Rohr; Spannhake, Die Leistungsaufnahme einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe mit radialen Schaufeln; Bader, Beitrag zur Theorie des Segelns; R. Mayer, Versuche über die ebene Biegung gekrümmter Stäbe. Manchen dieser Aufsätze wäre eine größere Verbreitung zu wünschen als sie naturgemäß einem solchen vereinzelt erschienenen Sammelband zuteil werden kann. Mises. 731

REINHOLD **RÜDENBERG,** Professor, Dr.-Ing. und Dr.-Ing. e. h. Aussendung und Empfang elektrischer Wellen. Mit 46 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. IV + 67 S.

Dem großen Kreis von Rundfunkteilnehmern, die für die Theorie der drahtlosen Uebertragung Interesse haben, gewährt dieses Büchlein eine ausgezeichnete Einführung. Ohne weitgehendere mathematische Hilfsmittel zu verwenden, weiß der Verf. ungleich mehr zu bieten als in üblichen populären Darstellungen zu finden ist. Das Büchlein ist wohl aus einem Vortrag hervorgegangen, den der Verf. in der Berliner Ortsgruppe der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik gehalten hat und der damals mit großem Beifall aufgenommen worden ist. Mises. 730

REINHOLD **RÜDENBERG,** Professor, Dr.-Ing. und Dr.-Ing. e. h., Chef-Elektriker der Siemens-Schuckertwerke, Privatdozent an der Techn. Hochschule zu Berlin. Kurzschlußströme beim Betrieb von Großkraftwerken. Mit 60 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. IV + 75 S. Preis 4,80 M.

Ein kleines, aber für die Praxis außerordentlich wichtiges Kapitel der nicht stationären Vorgänge in elektrischen Leitungen bilden die Kurzschlußströme, die namentlich beim Betrieb von Großkraftwerken von einschneidender Bedeutung werden können. Der Verf. gibt, gestützt auf seine reichen Erfahrungen in leicht faßlicher Weise auf wenigen Seiten die notwendigen Grundlagen zu einer quantitativen Vorausbestimmung aller Kurzschlußerscheinungen. Mises. 730

REINHOLD **RÜDENBERG,** Professor, Dr.-Ing. und Dr.-Ing. e. h., Chef-Elektriker der Siemens-Schuckertwerke, Privatdozent an der Techn. Hochschule zu Berlin. Elektrische Schaltvorgänge und verwandte Störungserscheinungen in Starkstromanlagen. Zweite, berichtigte Auflage. Mit 477 Abb. im Text und 1 Tafel. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VIII + 510 S. Preis geb. 24 M.

Die erste Auflage dieses Werkes ist hier in ausführlicher Weise besprochen worden[1]. In der kurzen Zeit bis zum Erscheinen der zweiten hat sich für den Verfasser die Notwendigkeit irgend welcher Veränderungen nicht ergeben, so daß er sich auf einige kleine Berichtigungen beschränken konnte. Dem Buche wird zweifellos auch in der neuen Auflage der Erfolg treu bleiben. Mises. 730

Technische Mechanik. Mit 166 Abb. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1925. 74 S. Preis 10 M.

Als Ergänzungsheft der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure ist eine Sammlung von 16 Aufsätzen erschienen, die ursprünglich für die VDI-Zeitschrift bestimmt waren, von der Schriftleitung aber ihres einheitlichen Charakters wegen einer besonderen Zusammenfassung gewürdigt wurden.

Wir heben aus dem Inhalt hervor eine Einführung in die Schwingungslehre von W. Hort sowie Berichte über Schwingungsfestigkeit und Dauerbeanspruchungen aus dem Materialprüfungsamt Groß-Lichterfelde. R. Biehl gibt eine neue kritische Uebersicht über die Formeln und Versuchsergebnisse betreffend den Strömungswiderstand in Rohrleitungen. Ein Aufsatz von Eck über Ventilströmungen liefert eine Darstellung der Ergebnisse der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit (Bd. 4 (1924), S. 464 bis 474). Mises. 729

Hydraulische Probleme. Ein wissenschaftlicher Ueberblick. Vorträge auf der Hydrauliktagung in Göttingen am 5. und 6. Juni 1925. Herausgegeben vom wissenschaftlichen Beirat des Vereines deutscher Ingenieure. Mit 165 Abb. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1926. VIII + 219 S. Preis 22,50 M.

Die Vorträge, die auf der hydraulischen Tagung in Göttingen[2] im Sommer 1925 gehalten wurden, sind durch den Verlag des Vereines deutscher Ingenieure in einem schön ausgestatteten Band mit den Diskussionsbemerkungen der Teilnehmer zusammengestellt worden. Das ganze hier behandelte Gebiet ist gegenwärtig so stark in Entwicklung begriffen, daß man in dem Buche nur das Festhalten eines augenblicklichen und flüchtigen Zustandes der Forschung erblicken kann. Aber eine solche Momentaufnahme wird manchem willkommen sein, der sich in die einschlägigen Fragen einarbeiten oder einen Ueberblick über das, was heute in der Hydraulik problematisch ist, verschaffen will. Mises. 729

[1] Diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 353.

[2] Vergl. diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 279.

E. **STUDY,** Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung. Erster Teil. Die Wissenschaft. Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik. Herausgegeben von Prof. Dr. Eilhard Wiedemann. Bd. 71. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig 1923. 268 S.

In einer ausführlichen Einleitung setzt sich der Verf. temperamentvollerweise dafür ein, daß die Vektoranalysis vom Gesichtspunkt der Invariantentheorie aus entwickelt werden müsse. Er denkt dabei natürlich an völlig andere Dinge als die, die den Physiker oder Mechaniker interessieren; vor allem an die Behandlung geometrischer Fragen des n-dimensionalen Raumes in großer formaler Allgemeinheit. Zweifellos wird auf diesem Gebiete die Invariantentheorie als das geeignetste und kräftigste Hilfsmittel der Forschung in Geltung bleiben. Mit Vektorrechnung in dem Sinne, wie sie etwa für die Leser dieser Zeitschrift in Frage kommt, hat dies nichts zu schaffen.

Mises. 728

LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Professor der Mathematik an der Friedrich-Wilhelm-Universität in Berlin, Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen. Zweite neubearbeitete Auflage. Mit 22 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. VI. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. IX + 356 S. Preis 18 M; geb. 19,50 M.

Gegenüber der ersten Auflage, die hier ausführlich besprochen worden ist[1]), ist das Buch durch einige Zusätze erweitert und im übrigen ganz neu durchgearbeitet worden. »Keine Seite ist unverändert geblieben« sagt der Verf. im Vorwort. Die Hinzufügungen betreffen vor allem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen und verschiedene Ausführungen über partielle Differentialgleichungen.

Mises. 728

Dr. MAX **BORN,** Professor an der Universität Göttingen. Vorlesungen über Atommechanik. Erster Band. Mit 43 Abb. Herausgegeben unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Hund, Assistent am physikalischen Institut Göttingen. Struktur der Materie in Einzeldarstellungen, herausgegeben von M. Born-Göttingen und J. Franck-Göttingen II. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. IX + 358 S. Preis 15 M; geb. 16,50 M.

Der Verf. dem die Gabe knapper und zugleich leicht verständlicher Darstellung eignet, gibt in diesem Bande eine Zusammenstellung derjenigen Kapitel aus der analytischen Mechanik, die in der Quantentheorie (man muß heute schon sagen in der »klassischen«, in Gegenüberstellung zur Wellenmechanik der Quanten) zur Verwendung kommen. Vorangestellt ist als Einleitung eine vortreffliche Einführung in die physikalischen Grundlagen der Theorie. Auch im weiteren Verlauf des Buches wird dauernd die Anwendung der mechanischen Sätze auf die Fragen der Quantenphysik im Auge behalten. Dem Referenten erscheint das nicht sehr umfangreiche Werk als ein sehr geeignetes Lehrbuch zur Erlernung der Quantentheorie für alle, die in den Anfangsgründen der Mechanik Bescheid wissen. Mises. 728

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 355/356.

ANTON **FLETTNER,** Mein Weg zum Rotor. Mit 114 Abb. Verlag Koehler & Amelang, Leipzig 1926. 123 S.

Der in den letzten Jahren durch mehrere Erfindungen bekannt gewordene Verfasser gibt hier, in hauptsächlich für die Jugend bestimmter Form, eine Darstellung seines Schaffens. Eine große Zahl sehr anschaulicher Bilder gewährt einen guten Einblick auch in manche technische oder wissenschaftliche Einzelheit.

Mises. 728

K. **HAHN,** Physikalisches Unterrichtswerk. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig:

Dr. KARL **HAHN,** Leiter der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg. Grundriß der Physik. Ausgabe für Knaben- und Mädchenschulen realer Richtung. I. Teil für Realschulen, Lyzeen und die Mittelstufe von Vollanstalten. Vierte Auflage mit 236 Figuren. 1926. VI + 191 S. Preis kart. 3,80 M. — II. Teil: Für die Oberstufe von Vollanstalten und für Fachschulen. Vierte Auflage. Mit 366 Figuren. 1926. VIII + 318 S. Preis geb. 5,80 M.

Dr. KARL **HAHN,** Leiter der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg. Grundriß der Physik. Verkürzte Ausgabe für Knaben- und Mädchenschulen gymnasialer Richtung. I. Teil: Vorbereitender Kursus in zwei Ausgaben: A mit, B ohne den Anhang »Grundzüge der Chemie« von Prof. Dr. E. Löwenhardt. Zweite Auflage. Mit 213 Figuren. 1926. VI + 156 + 51 S. Preis kart. 4 M. — II. Teil: Systematischer Kursus. In zwei Ausgaben: A mit, B ohne den Anhang »Astronomie«. Zweite Auflage. Mit 286 Figuren im Text. 1926. VII + 249 + 21 S. Preis geb. 5,20 M.

Dr. KARL **HAHN,** Leiter der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg. Mathematische Physik. Ausgewählte Abschnitte und Aufgaben aus der theoretischen Physik. Für höhere Lehranstalten und Fachschulen und zum Selbstunterricht für Studierende. Mit 46 Figuren. IV + 163 S. 1924. Preis kart. 4,60 M.

Dr. KARL **HAHN,** Leiter der Oberrealschule auf der Uhlenhorst und WILHELM **KOCH,** Oberlehrer an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst. — Physikalische Schülerübungen, nach den Grundsätzen und Schöpfungen Ernst Grimsehls bearbeitet und er-

weitert. Mit 158 Figuren im Text. 1926. X + 126 S. Preis kart. 3,20 M.

Das von Karl Hahn, dem Nachfolger Grimsehls an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg herausgegebene Unterrichtswerk ist in diesem Jahre bereits an vielen Schulen neu eingeführt worden. Seine Beliebtheit verdankt es der knappen, oft nur andeutenden Ausdrucksweise und der Anpassung an das Fassungsvermögen der einzelnen Klassenstufen. Der alte Streit, ob die Tertianer zuerst die Mechanik oder zuerst die Wärme vorgesetzt erhalten sollen, ist in glücklicher Weise entschieden worden: Die statischen und thermischen Eigenschaften der Körper werden gemeinsam behandelt, die Bewegungsgesetze hinterhergestellt. Elektrizität geht der Optik voran.

Am Schluß eines jeden Abschnitts wird eine kurze geschichtliche Entwicklung gegeben. Dadurch wird der Forderung der »Richtlinien«, auf historische und kulturelle Zusammenhänge einzugehen, formal Genüge geleistet. »Den Irr- und Schlangenwegen in dem ursprünglichen Gang wichtiger Entdeckungen zu folgen«, würde auch mit dem klaren Tatsachensinn des Buches nicht vereinbar sein. Aus dem gleichen Grunde erhält die »Bedeutung des physikalischen Weltbildes« am Schluß des zweiten Teils kaum mehr als eine Seite zugewiesen. Dafür findet man viel Schönes über die Anfangsgründe der Relativitätstheorie und der Atomphysik, das von begabten Primanern, auch wenn es im Unterricht nicht behandelt werden kann, mit Feuereifer verschlungen werden wird.

Leider kommt eine andere Aufgabe der »Richtlinien«: »dem Schüler die außerordentlich hohe Bedeutung der physikalischen Technik für Wirtschaftsleben und Kultur zum Bewußtsein zu bringen und Verständnis zu wecken für die geistigen und schöpferischen Leistungen des Ingenieurs« zu kurz. Vom Motor wird selbst im zweiten Teil nur der Viertakt gebracht. Ein Indikatordiagramm fehlt, ebenso die Begriffe Mitteldruck, Leistung, Drehmoment. Ganz unzureichend ist das, was über das Flugzeug gesagt wird. Hier hätte im Anschluß an die Strömungslehre mit Leichtigkeit ein kurzer Abriß der Tragflügeltheorie eingeschaltet werden können.

Das Buch »Mathematische Physik« stellt unter Verwendung von Differential- und Integralrechnung eine mathematische Ergänzung zum zweiten Teil dar. Es umfaßt etwa das, was in den mathematischen Ergänzungen zur Experimentalphysik auf der Hochschule gebracht wird. Hans Friesecke. 713

H. **WEYL,** Raum — Zeit — Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Mit 23 Textfiguren. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. VIII + 338 S.

Von allen Darstellungen der Relativitätstheorie ist die von Weyl, was mathematische Eleganz und logische Schärfe im Aufbau betrifft, die gelungenste. In beiden Beziehungen stellt die vorliegende Auflage wieder einen wesentlichen Fortschritt gegen die bisherigen dar. Der mathematischen Grundlage wurde eine anschaulichere Gestalt dadurch gegeben, daß überall der Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors in den Vordergrund gestellt wurde. Dieser Begriff wird auch bei eigentlich physikalischen Betrachtungen festgehalten und es gelingt dadurch, manche sonst komplizierte Gedanken durchsichtig zu machen. So erleiden die Schwingungsebenen infinitesimaler Pendelschwingungen, die Drehungsachsen kleiner Kreiseln, beim Transport durch Gravitationsfelder Drehungen gegenüber dem üblichen nahezu Newtonschen Bezugssystem, die sich als Aenderungen von Vektoren bei Parallelverschiebungen in einem Riemannschen Raum auffassen lassen, dessen Linienelement durch das Gravitationsfeld bestimmt ist. So entsteht die von Fokker und Schouten berechnete »geodätische Präzession der Erdachse« usw. Ein solcher sich selbst überlassener infinitesimaler Gyroskop, ein »Kreiselkompaß«, gestattet dann auch für einen kleinen starren Körper anzugeben, ob er drehungsfrei ist. In diesem Fall ist er als lokales Inertialsystem benutzbar, und relativ zu ihm wird für jeden anderen Körper entschieden, ob er sich dreht oder nicht. So läßt sich auch in der allgemeinen Relativitätstheorie ein präziser Sinn mit dem Satz: »die Erde dreht sich« verbinden.

So wie in diesem Punkt hat der Verf. gerade, wo es sich um die Grundlegung der Mechanik handelt, überall eine Verschärfung der Grundbegriffe angestrebt. Die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie leidet bekanntlich daran, daß die Lorentztransformation aus der Elektrodynamik herübergenommen ist, und daher eine Herleitung der Lorentz-Einsteinschen mechanischen Grundgleichungen, ebenso wie des Satzes von der Aenderung der Ruhmasse mit der Energie, aus rein der Mechanik angehörenden Grundannahmen, ziemlich schwierig ist. Weyl gibt eine solche Herleitung, die nur das Additionstheorem der Geschwindigkeiten aus der Theorie der Lorentztransformationen entlehnt, indem er anstatt der Masse den Impuls als ursprünglichen Begriff einführt und den Erhaltungssatz des Impulses mit dem genannten Additionstheorem und dem Relativitätsprinzip kombiniert.

Es ist oft geklagt worden, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie sich nicht mit einem einzigen Satz so kurz wiedergeben lasse wie die Newtonsche mit der Behauptung, daß sich zwei Massen verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung anziehen. Wenn auch diese Klage vergißt, daß die Newtonsche Theorie nur deshalb so kurz auszusprechen ist, weil ihre Voraussetzungen wegen der Art der allgemeinen Schulbildung als bekannt vorausgesetzt werden können, so hat doch Weyl für den Grundgedanken der Einsteinschen Theorie eine so glückliche Formulierung gefunden, daß sie auch, was Kürze betrifft, mit der Newtonschen in

Wettbewerb treten kann. In der klassischen Mechanik kann man, wenn man ein beliebiges Bezugssystem zugrundelegt (nicht gerade ein Inertialsystem), die Geschwindigkeit eines beweglichen Massenpunktes als die Wirkung von zweierlei Einflüssen ansehen: erstens einer sich erhaltenden Geschwindigkeit, die auch relativ zum Inertialsystem vorhanden wäre und einer Aenderung der Geschwindigkeit, die als Zentrifugalbeschleunigung, Coriolisbeschleunigung usw. bezeichnet wird. Alle diese Einflüsse sind von der Masse des bewegten Teilchens unabhängig; sie werden als »Führungsfeld« zusammengefaßt. Zweitens wirken aber die eigentlichen Kräfte, die Beschleunigungen erteilen, die den Massen der bewegten Teilchen verkehrt proportional sind. Sie bilden das »Kraftfeld«, zu dem insbesondere die Kohäsionskräfte gehören, durch welche die Teilchen der wirklichen Körper zusammenhängen. Die klassische Mechanik beschreibt jede Bewegung als Kampf zwischen Führungsfeld und Kraftfeld. Der Grundgedanke der Einsteinschen allgemeinen Relativitätsmechanik ist nun der, daß sie das Gravitationsfeld nicht zum Kraftfeld, sondern zum Führungsfeld rechnet. Es sollen die Abweichungen von der Bewegung, die freie, sich selbst überlassene Teilchen im Schwerefeld beschreiben würden, durch einfache Gesetze gegeben sein. Kraft, wie z. B. eine Kohäsionskraft, ist jeder Einfluß, der ein Massenteilchen am freien Fall hindert.

Schließlich haben die Probleme der Beschaffenheit des Gravitationsfeldes im Großen, die ja gleichzeitig die der geometrischen Struktur des Weltraumes sind, eine ausführlichere Behandlung gefunden.

Wenn, wie der Verf. in der Einleitung sagt, »das Geranke der Spekulation beschnitten wurde«, so müssen wir sagen, daß dadurch der philosophische Gehalt des Werkes nur vergrößert wurde. Es ist ihm nun wirklich gelungen, das Zusammenwirken philosophischer, mathematischer und physikalischer Impulse, das für die Relativitätstheorie deutlicher ist als für jede andere physikalische Theorie, dem Leser recht augenscheinlich zu machen. Dadurch gehört dieses Buch zu den wenigen, durch deren Studium man nicht nur etwas erlernt, sondern selbst an innerem Reichtum gewinnt. Philipp Frank. 709

BERTRAND **RUSSEL,** F. S. R. ABC der Atome. Uebersetzt von Dr. Werner Bloch. Franckhsche Verlagshandlung, Stuttgart 1925. 109 S.

Um physikalische Gesetzmäßigkeiten mit Umgehung aller mathematischen Formeln kurz und präzise erläutern zu können, muß ein Verfasser nicht nur über eine umfassende Beherrschung des Stoffes verfügen: er muß auch ein guter Stilist sein und genug muntere Phantasie zu Gebote haben, um durch prägnante Bildhaftigkeit, durch witzige Beispiele auch harte Bissen zu würzen. In diesem besten Sinne populär und in leicht lesbarer Form behandelt Russell die neueren Theorien des Atombaus, die Quantengesetze, die Radioaktivität usw. Die Lektüre wird ergänzt durch reichliches, zum Teil recht lustiges Bildermaterial.

Berlin-Dahlem. G. Laski. 668

Dr. E. **BACK,** Privatdozent für Experimentalphysik in Tübingen, und Dr. A. **LANDÉ,** a. o. Professor für theoretische Physik in Tübingen. Zeemaneffekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien. Mit 25 Textabbildungen und 2 Tafeln. Struktur der Materie in Einzeldarstellungen. Herausgegeben von M. Born-Göttingen und J. Franck-Göttingen. I. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. XII + 213 S. Preis 14,40 M. geb. 15,90 M.

Die Entwicklung der Quantentheorie des Atombaus hat in erster Linie spektroskopische Untersuchungen zur Grundlage und unter diesen nehmen einen breiten Raum die Forschungen über den Zeemaneffekt, d. i. die Aufspaltung der Spektrallinien im magnetischen Felde, ein. Der systematischen Zusammenarbeit von Theorie und Experiment ist es gelungen, in überraschend kurzer Zeit ein großes Tatsachenmaterial festzulegen und in den zunächst verwirrend komplizierten Erscheinungen allgemeine und geordnete Gesetzmäßigkeiten zu finden. Ein Theoretiker und ein Experimentator, die sich einzeln und in gemeinsamer Arbeit große Verdienste um die Aufklärung dieses Gebietes erworben haben. E. Back und A. Landé, haben sich nun auch vereinigt, um in einer ausführlichen Monographie die Grundlagen des normalen und anomalen Zeemaneffektes, des Paschen-Back-Effektes, einiger verwandter magnetischer Erscheinungen (Magneton, Stern-Gerlach-Effekt), die Theorie der Multipletts, die experimentellen Grundlagen, die Apparatur, und schließlich die Methoden der Auswertung empirisch festgestellter Zeemaneffekte zu behandeln. Das Buch ist für jeden, der sich mit der Physik des Atombaus befaßt, unentbehrlich.

Berlin-Dahlem. G. Laski. 663

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Herausgegeben von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften«. Zweiter Band. Mit 38 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. 252 S. Preis 8 M, geb. 9,50 M. — Dritter Band. Mit 100 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. 404 S. Preis 18 M, geb. 19,20 M.

Von der schönen Sammlung: »Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften« liegen bereits Band II und III vor; der eine erschien anläßlich der Physikertagung in Bonn 1923, der letztere anläßlich der Naturforscherversammlung in Innsbruck 1924.

In Band II ist diesmal das erste Drittel astronomischen und geodätischen Fragen gewidmet, J. Hopmann-Bonn berichtet über die Bewegungen der Fixsterne, G. Schneider-Potsdam über Entwicklung und Stand der Parallaxenforschung, A. Kopff-Berlin über

das Milchstraßensystem, B. Wanach-Potsdam über die Polhöhenschwankungen. Das zweite Drittel gehört den Fragen der reinen Physik. Hier bespricht F. Henning-Berlin Erzeugung und Messung tiefer Temperaturen. J. Franck-Göttingen eröffnet den Einblick in neue Erkenntnisse über den quantenhaften Energieaustausch bei unelastischen Zusammenstößen von Atomen und Molekülen, die zum größten Teile ihm selbst und seiner Schule zu verdanken sind. W. Gerlach-Tübingen referiert über eigene und fremde Untersuchungen über Magnetismus und Atombau, A. Landé-Tübingen über Fortschritte beim Zeemaneffekt, F. Paneth-Berlin über das jüngst entdeckte Element 72 (Hafnium), zu dessen Auffindung die Voraussagen der Bohrschen Theorie führten.

Bei den Technikern aber wird das größte Interesse der umfangreiche letzte Aufsatz finden: Kaltreckung und Verfestigung (G. Masing und M. Polanyi). Nach einer kurzen Uebersicht über die technischen Phänomene bei der Verfestigung werden im Anschuß an die bisherigen theoretischen Deutungen die inneren Vorgänge bei der Kaltreckung und Verfestigung behandelt. Dann erfolgt die Besprechung der neueren Untersuchungen über Einkristalle und ihre Bedeutung für die Aufklärung der Kaltreckung. Schließlich werden die Aenderungen der physikalischen und chemischen Eigenschaften der Metalle bei der Kaltreckung erörtert und die Deformationsstrukturen und ihre Entstehung beschrieben. Ein reiches Material an Tabellen, Kurven und Photographien sowie eine umfassende Bibliographie bis 1923 erleichtern es dem Physiker und Techniker gleicherweise, sich einen Ueberblick über dieses neue und reizvolle Gebiet zu verschaffen.

Der dritte Band bringt wieder astronomische Aufsätze: A. Brill: Die Strahlung der Sterne, R. Heß: Die Statistik der Leuchtkräfte der Sterne, H. Kienle: Astronomische Prüfungen der allgemeinen Relativitätstheorie.

H. Sponer und R. Minkowski berichten über den Durchgang von Elektronen durch Atome, Untersuchungen, die die Vorgänge bei elastischen Zusammenstößen zwischen Atomen und Elektronen verfolgen. Dabei dringen die stoßenden Elektronen in das Innere der Atome ein und erfahren unter der Einwirkung der Kernladungen Ablenkungen, die bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten nicht mehr durch die Gesetze der klassischen Mechanik beschrieben werden können. Hier treten in analoger Weise wie bei den bekannten Franck-Hertzschen Versuchen über den unelastischen Elektronenstoß die Gesetze der Quantentheorie in Geltung. Referentin faßt die Ergebnisse experimenteller und theoretischer Arbeiten über Ultrarotforschung zusammen, B. Gudden behandelt die Elektrizitätsleitung in kristallisierten Stoffen unter Ausschluß der Metalle. Er bespricht die Einteilung der Stoffe in elektronische und elektrolytische Leiter, die Gesetzmäßigkeiten der Leitung in festen Jonenleitern und die unselbständige Leitung in Kristallen. (Lichtelektrische Leitfähigkeit.) Besonders die letzteren Untersuchungen sind für das praktische Problem der Photometrie und des Lichtempfanges von hoher Bedeutung.

Fragen, die letzten Endes den Bau der Atome betreffen, sind die Aufsätze von L. Meitner über den Zusammenhang zwischen β- und γ-Strahlen und von W. Gerlach über Atomstrahlen gewidmet. Die Theorie der Elektrolyte, wie sie in den letzten Jahren von P. Debye und seinen Mitarbeitern entwickelt wurde, bringt E. Hückel in vollständiger Uebersicht. Ein technisches Thema: Elektrische Ventile und Gleichrichter, behandelt Günther-Schulze, und schließlich bringt J. Katz den ersten Teil seines Berichtes über Quellungserscheinungen, dessen zweiter Teil im nächsten Bande der Sammlung erscheinen soll.

Berlin-Dahlem. G. Laski. 657

H. KAYSER, Professor der Physik an der Universität Bonn. Tabelle der Schwingungszahlen der auf das Vakuum reduzierten Wellenlängen zwischen λ 2000 A und λ 10 000 A. Verlag von S. Hirzel, Leipzig 1925. V + 106 S. Preis geh. 10,80 M, geb. 13 M.

Die spektroskopischen Gesetzmäßigkeiten, die heute die Grundlagen der Lehre vom Atombau bilden, werden zweckmäßigerweise, gestützt auf die Bohrsche Frequenzbedingung, als Beziehungen zwischen den Frequenzen der Spektrallinien dargestellt. Die experimentellen Methoden aber führen unmittelbar zur Bestimmung von Wellenlängen. Für jeden Spektroskopiker ist es nun sicherlich eine recht unerquickliche Aufgabe, jedesmal die gemessenen Wellenlängen in Schwingungszahlen umzurechnen.

Die ungeheure Mühe, der sich der Altmeister der deutschen Spektroskopie unterzogen hat, ein Tabellenwerk herzustellen, aus dem für die auf das Vakuum bezogenen Wellenlängen zwischen 2000 und 10 000 A die entsprechenden Schwingungszahlen, auf 7 Dezimalen genau, unmittelbar entnommen werden können, wird ihm jeder Physiker danken, der dadurch Zeit und Arbeitskraft erspart.

Berlin-Dahlem. G. Laski. 650

Dipl.-Ing. P. **STEPHAN,** Regierungs-Baumeister, Professor. Die Technische Mechanik des Maschineningenieurs mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Fünfter Band. Die Statik der Fachwerke. Mit 198 Textfiguren. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. 140 S. Preis geb. 8,40 M.

Dieses Bändchen erfüllt den Wunsch jedes Maschinenbauers, der mit Hebemaschinen zu tun hat, nach einem Werk, in dem man ohne spezielle Vorkenntnisse rasch alles zur Berechnung einfacher und gangbarer Eisenkonstruktionen Nötige finden kann. Denn das bekannte Werk von Andrée setzt schon einen vorgebildeten Statiker voraus und zeigt nur die einfach-

sten Wege der Berechnung der einzelnen Bauteile, während das ausführliche Buch von Unold zwar alle grundsätzlichen Erörterungen, aber wenig Anwendungsbeispiele bringt. Hier hingegen werden jeweils die allgemeinen Regeln und Vorschriften beim Gang der Berechnung in einer dem Maschinenbauer geläufigen Form vorgebracht und durch gut gewählte Beispiele erläutert und eingeprägt.

Die Trennung der statisch bestimmten und unbestimmten Fachwerke und die gesonderte Anführung der möglichen Arten der Behandlung erleichtern den allgemeinen Ueberblick und sind sicherlich demjenigen erwünscht, der sich rasch in die Grundlagen der Statik einarbeiten will, ohne noch ganz bestimmte Aufgaben vor sich zu haben; dabei bleibt dem Leser genügend Raum zu eigenem Denken, zu dem oft nur andeutungsweise gemachte Bemerkungen anregen, was als ein Vorzug für den Lernenden angesehen werden muß.

Hier und da vorkommende Unklarheiten und stilistische Mängel können den Wert des Büchleins nicht vermindern, es soll allen Studierenden und Praktikern des Hebemaschinenbaues bestens empfohlen werden. Die Ausstattung ist vorzüglich.

Prag. K. Körner. 707

Dr.-Ing. GEORG **UNOLD,** Professor an der Staatlichen Gewerbe-Akademie in Chemnitz. Statik für den Eisen- und Maschinenbau. Mit 606 Abb. im Text. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. VIII + 342 S.

Das vorliegende Buch hat die Aufgabe, dem Maschinen- wie dem Bauingenieur, der im Eisenbau tätig sein will, die erforderliche Baustatik in ihrem ganzen Umfang zu vermitteln. Der reichhaltige Stoff ist durch eine klare Einteilung übersichtlich angeordnet. Ein kurzer 1. Abschnitt bringt die allgemeinen Lehrsätze der Statik in üblicher Darstellung.

Der 2. Abschnitt ist der Beanspruchung statisch bestimmter ebener Gebilde gewidmet. Die zahlreichen behandelten Fälle, die durch sehr gute Abbildungen klar zur Darstellung gebracht worden sind, werden dem in der Praxis tätigen Ingenieur sicher willkommen sein. Für den Studierenden, der in die Statik eingeführt werden soll, scheint mir dagegen die Fülle des Gebotenen ein Nachteil, da sie zu leicht verwirrt und das Augenmerk von den grundlegenden Gesetzen ablenkt. Besonders ausführlich wird der Dreigelenkbogen mit Erweiterung auf die Gelenkkette behandelt.

Im 3. Abschnitt »die elastische Formänderung statisch bestimmter Gebilde« sowie im 4. Abschnitt »Statisch unbestimmte ebene Gebilde« geht der Verfasser nicht wie sonst üblich von den Sätzen über die Formänderungsarbeit und vom Arbeitssatz aus, sondern behandelt alle einschlägigen Aufgaben auf Grund unmittelbarer geometrischer Anschauungen. Er glaubt, darin einen Vorteil zu erblicken. Man kann darüber selbstverständlich verschiedener Meinung sein, wobei die Gewöhnung eine große Rolle spielt. Ich kann jedenfalls in dem Verfahren des Verfassers, das die Sätze über die Formänderungsarbeit als Hilfsmittel ausschaltet, im Ganzen genommen keinen Vorteil erblicken. Es ist im Grunde nichts anderes als das Prinzip der virtuellen Verrückungen, ohne daß, wie mir scheint, darauf Bezug genommen und dieses Gesetz in seiner allgemeinen Gültigkeit ausgesprochen wird.

Die zahlreichen behandelten Beispiele, die sich zum Teil auf moderne Bauwerke beziehen, bieten wertvolle Anregungen.

Wegen seiner Vorzüge, die namentlich die Reichhaltigkeit und die Uebersichtlichkeit der Anordnung betreffen, sei das Buch jedem im Eisenbau tätigen Ingenieur aufs wärmste zur Durchsicht empfohlen.

München. L. Föppl. 682

Dr. HEINRICH W. E. **JUNG,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Halle-Wittenberg. Algebraische Flächen. Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover 1925. XVI + 410 S. Preis geh. 18 M, geb. 21 M.

Es ist dafür gesorgt, daß die Bäume nicht in den Himmel wachsen. So ist es denn heilsam, sich von Zeit zu Zeit daran zu erinnern, daß es auch in der reinen Mathematik noch so manches Gebiet gibt, wo die Anschauung der Strenge der Beweisführung noch weit vorauseilt, der Strenge, die mancher heute am liebsten von jedem Schuljungen verlangen möchte. Das im vorliegenden Buch behandelte Gebiet ist ein solcher Skandal in den Augen der gemeinten Richtung. Des Verfassers Verdienst ist es, Vieles von dem strenge bewiesen zu haben, was anschaulich längst bekannt und klar war. Bieberbach. 659

Dr. FRIEDRICH **BOEHM,** Professor an der Universität München. Versicherungsmathematik. I. Elemente der Versicherungsrechnung. Sammlung Göschen Nr. 180. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1925. 144 S. Preis 1,25 M.

Als erster Teil eines in zwei Bändchen angelegten Lehrbuches der Versicherungsmathematik liegt hier eine knappe Darstellung der Lebensversicherungsrechnung auf Grund der Rechnungsgrundlagen erster Ordnung vor. Die mathematischen Entwicklungen sind sehr einfach und auch für einen Anfänger leicht zugänglich. Jedem einzelnen Abschnitte des Bändchens sind Zahlenbeispiele beigefügt, durch die die Entwicklung an Interesse gewinnen muß. Bei dem elementaren Charakter des Buches ist über den Inhalt nichts besonderes zu sagen, erwähnenswert wäre höchstens, daß der Verfasser auch die für die Technik wichtigen gesetzlichen Bestimmungen über Prämienreserve und Prämienreserveberechnung, Rückkauf und Umwandlung — wenn auch nur kurz — behandelt. Auf S. 50 bemerkt der Verfasser, »daß von einer unmittelbaren und genauen Einsicht« in die bei Variationen des Eintrittsalters

der Versicherungsdauer und des Endalters sich ergebenden Verhältnisse hier, nämlich bei der gemischten Versicherung, weniger zu erhoffen sei, als bei der temporären Leibrente. Das ist natürlich nicht richtig. Diese Bemerkung ist deshalb zu bedauern, weil in den meisten andern Punkten die sehr anerkennenswerte Absicht vorwaltet, den ziffernmäßigen Verlauf der Formeln für die Variation der verschiedenen Konstanten derselben zu diskutieren.

Feber 1926. E. Fanta. 654

Professor Dr. ALFRED MANES, Versicherungslexikon. Zweite völlig neu bearbeitete Auflage. (Viertes und fünftes Tausend.) Verlegt bei E. S. Mittler & Sohn in Berlin 1924. 1526 S. Preis Ganzleinen-Lexikonformat 50 M.

Anläßlich des 25 jährigen Bestandesjubiläums des Deutschen Vereines für Versicherungswissenschaft wurde von dem im Jahre 1909 in erster Auflage erschienenen und im Jahre 1913 durch einen Ergänzungsband erweiterten Versicherungslexikon eine Neuauflage veranstaltet, welche auch allen politischen und wirtschaftlichen Umwälzungen Rechnung trägt, die sich seit dem Umsturze zugetragen haben. Der Inhalt des Buches und die Anordnung des Stoffes tragen dessen Titel Rechnung. Es ist ein Nachschlagewerk, an das sich die Versicherungspraktiker seit 1909 derart gewöhnt haben, daß sie dessen Gebrauch kaum mehr entbehren wollen. In mathematischer Beziehung erhebt das Buch keinerlei Ansprüche; es macht den Gebrauch von mathematischen und sonstigen Lehrbüchern des Versicherungswesens nach keinerlei Richtung hin entbehrlich. Die Literaturangaben dieser Neuauflage bilden eine Fortführung der Literaturangaben der ersten Auflage und des Ergänzungsbandes; diese Tatsache macht leider die Benützung dieser letzteren beiden Bände nicht entbehrlich.

Juli 1926. E. Fanta. 680

Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft. Herausgegeben von Prof. Dr. phil. Dr. jur. Alfred Manes, Vorstand des Vereins. Heft XXXIX. (Ausgegeben Mai 1926.) Fortbildungs-Vorträge. II. Teil: Lebensversicherung und sonstige Personenversicherung. Vorträge von Direktor Dr. Berger; Landesrat Dr. Biedermann; Prof. Dr. Bleicher; Regierungsrat Prof. Dr. Böhmer; Dr. Braun; Prof. Dr. Brendel; Prof. Dr. Florschütz; Generaldirektor Gamborg; Direktor Gehrke; Generaldirektor Dr. Hager; Wirkl. Geh. Rat Herz; Direktor Prof. Dr. Holwerda; Prof. Dr. Loewy; Prof. Dr. Lorey; Generaldirektor Palme; Aktuar Richmond. Verlag von E. S. Mittler & Sohn, Berlin 1926.

In diesem zweiten Teil der »Fortbildungs-Vorträge« sind die in dem im April 1926 gehaltenen Fortbildungskurse für Angestellte der Versicherungsanstalten gelesenen Vorträge über Lebensversicherung enthalten. Leider können wir auf eine ausführliche Würdigung dieses lehrreichen und interessanten Buches nicht eingehen; wir müssen uns damit begnügen, diejenigen Artikel hervorzuheben, die auf ein allgemeineres Interesse bei Mathematikern und Statistikern Anspruch erheben können. Solche sind die Vorträge von H. Braun und von A. Berger über das Risiko in der Lebensversicherung, von P. E. Böhmer über Sterblichkeitsauslese, von W. Lorey über neuere mathematische Methoden, von A. D. Holwerda über die Berechnungsarten der Prämien und Prämienreserven in Holland, von G. W. Richmond über neue Sterblichkeitserfahrungen in Großbritannien und endlich von A. Loewy über die statistischen Grundlagen der Sozialversicherung.

P. Veress. 685

Dr. RUDOLF FUETER, o. Professor an der Universität Zürich. Das mathematische Werkzeug des Chemikers, Biologen und Statistikers. Vorlesungen über die höheren mathematischen Begriffe in Verbindung mit ihren Anwendungen. Veröffentlichungen der Schweizerischen mathematischen Gesellschaft. Band 3. Verlag Orell Füssli, Zürich-Leipzig-Berlin 1926. 268 S. Preis 12 M; geb. 14,40 M.

Das vorliegende Lehrbuch stellt sich als Aufgabe, Studierende oder Bearbeiter der im Titel genannten experimentellen Wissenschaften in die Begriffswelt und in die Methoden der Analysis einzuführen. Es unterscheidet sich von anderen ähnlich gerichteten Unternehmungen hauptsächlich darin, daß das Hauptgewicht nicht so sehr auf ein großes Tatsachenmaterial, als vielmehr auf ein »wirkliches Eindringen in die Begriffe« gelegt wird. Es ist schade, daß dieses Programm, wohl hauptsächlich infolge der überall angestrebten Kürze der Darstellung, in manchen Kleinigkeiten nicht ganz eingehalten wurde. (Die auf S. 22 gegebene Definition der Stetigkeit einer Funktion dürfte in dem Anfänger kaum die richtigen Vorstellungen erwecken. Die Definition der Fundamentalreihe auf S. 39 kann den Anschein erwecken, als ob die Differenz $|f(x)-A|$ mit abnehmendem $|x-a|$ notwendig monoton abnehmen müßte.)

Abgesehen von derartigen Einzelheiten werden aber die Elemente der Differential- und Integralrechnung, Anwendungen derselben sowie die Anfangsgründe der Fehlerrechnung und der Differentialgleichungen klar und gut verständlich behandelt und durch eine große Anzahl von Beispielen aus verschiedenen Zweigen der Naturwissenschaften auf interessante Weise erläutert. An Vorkenntnissen wird bloß ein Minimum vorausgesetzt, so daß man das Buch jedem Anfänger warm empfehlen darf.

G. Szegö. 712

L. SCHLESINGER, ord. Professor an der Universität Gießen und A. PLESSNER, Dr. Phil. Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1926. V + 229 S. Preis brosch. 14 M; geb. 16 M.

Das Buch bietet zunächst eine Einführung in die »reelle Funktionentheorie«, — besonders in die Borel-Lebesguesche Maß- und Integrationstheorie —, die in Umfang und Gliederung, aber auch dem Geiste nach an einschlägige Bücher der »collection Borel« erinnert; weitgehend wird auf die französischen Originalarbeiten von Borel, Lebesgue, de la Vallée-Poussin zurückgegriffen. In einer im Verhältnis zu den großangelegten Werken von C. Carathéodory und H. Hahn knappen Form werden die wesentlichsten Begriffe und Resultate der schönen Theorie, — die allerdings für die Anwendungen bis jetzt nur geringe Bedeutung erlangt hat — entwickelt.

Ein Schlußkapitel bringt, gewissermaßen als mathematisches »Anwendungsbeispiel«, die Grundzüge der modernen Theorie der Fourierreihen, wie sie in so kurzer, strenger und weitgehend moderne Forschungen berücksichtigender Art, bisher in deutscher Sprache kaum dargestellt worden ist. Behandelt wird etwa so viel wie in dem ausgezeichneten Kapitel über Fourierreihen im II. Bande des bekannten »cours d'analyse« von de la Vallée-Poussin, nämlich die Grundbegriffe der Konvergenz- und Summationstheorie der Fourierreihen unter besonderer Berücksichtigung des Fejerschen Verfahrens; darüber hinausgehend wird dankenswerterweise das Fischer-Rieszsche Theorem gebracht, leider ohne Hinweis auf die allgemeinere Bedeutung dieses Satzes für die — vom Standpunkt abstrakter Mathematik wie auch dem der Anwendungen — so wichtige Theorie der Entwicklung nach allgemeineren Orthogonalsystemen.

H. Pollaczek-Geiringer. 723

Ferner sind folgende Werke bei der Schriftleitung eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Aus dem Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig, Sammlung Göschen:

Dr. A. **Thum,** Vorstand der Versuchsanstalt der Brown Boveri & Cie. A.-G. Mannheim. Die Werkstoffe des Maschinenbaues. I. Die Metalle als Konstruktionswerkstoffe, ihre Festigkeitsaufgaben und Prüfungsarten. Die Eisenlegierungen und ihre allgemeinen Eigenschaften. Mit 54 Abb. 132 S. Preis 1,50 *M.* — II. Die Eisen- und Metallegierungen, ihre Festigkeitseigenschaften, chemische Zusammensetzung und ihr Verwendungszweck. Die Hilfswerkstoffe des Maschinenbaues. Mit 19 Abb. 130 S. Preis 1,50 *M.*

Dr. G. **HOHEISEL,** Privatdozent in Breslau. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 159 S. Preis 1,50 *M.*

Der Verf. behandelt auf knappem Raum fast den ganzen Stoff, der in den üblichen Lehrbüchern geboten zu werden pflegt. Gleichungen erster Ordnung, höherer Ordnung, lineare Gleichungen und Randwertaufgaben.

Dr. W. **STERNBERG,** Privatdozent in Heidelberg. Potentialtheorie. I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 S. Preis 1,25 *M.*

Definition, Stetigkeitseigenschaften und Greensche Formeln werden besprochen. Anwendungen sind einem weiteren Bändchen vorbehalten.

Dr.-Ing. R. **HUGERSHOFF,** o. Prof. a. d. Forstlichen Hochschule zu Tharandt und Dozent an d. Technischen Hochschule zu Dresden, und Dr.-Ing. OTTO **ISRAEL,** a. o. Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden. Kartographische Aufnahmen und geographische Ortsbestimmung auf Reisen. I. Die topographischen Aufnahmen. Mit 66 Figuren und 2 Tafeln. Zweite neubearbeitete Aufl. 152 S. Preis 1,50 *M.*

Professor P. B. **FISCHER,** Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Elementare Algebra. Mit 20 Figuren. 149 S. Preis 1,50 *M.*

Dr. HANS **FALCKENBERG,** Professor an der Universität Gießen. Elementare Reihenlehre. Mit 4 Figuren im Text. 136 S. Preis 1,50 *M.*

Verein deutscher Ingenieure 1856—1926. VDI-Verlag, Berlin 1926. 128 S.

PAUL **WENTZKE.** Franz Grashof, ein Führer der deutschen Ingenieure. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1926. 130 S.

Eine anregend geschriebene Biographie und Uebersicht über die wissenschaftliche Lebensarbeit Grashofs. Gleich dem vorher angeführten Buch in recht geschmackvoller Ausstattung.

A. S. **EDDINGTON,** Professor an der Universität Cambridge. Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. Band XVIII der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von R. Courant. Uebersetzung von Alexander Ostrowski, Göttingen, und Harry Schmidt, Cöthen. Mit einem Anhang: Eddingtons Theorie und Hamiltonsches Prinzip von Albert Einstein. J. Springer, Berlin 1925. 377 S. Preis geb. 19,50 *M.*

Dr. phil. ARTHUR **HAAS,** a. o. Professor für Physik an der Universität Wien. Die Welt der Atome. Zehn gemeinverständliche Vorträge. Mit 37 Figuren im Text und auf drei Tafeln. Verlag von Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig 1926. XII + 130 S. Preis geh. 4,80 *M*, geb. 6 *M.*

FR. **BREUSCH,** Professor in Freiburg i. B. Ziele und Wege des Unterrichts in Mathematik und exakten Naturwissenschaften. I. Mathematik. 35. Band von Wissen und Wirken. Einzelschriften zu den Grundfragen des Erkennens und Schaffens. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1926. 97 S. Preis 1,80 *M.*

Prof. V. **POLLACK,** Technische Hochschule Wien. Die Beweglichkeit bindiger und nicht bindiger Materialien. Abhandlungen zur praktischen Geologie und Bergwirtschaftslehre Bd. 2. Verlag Wilhelm Knapp, Halle 1925. IV + 139 S. Preis brosch. 9,80 *M.*

Dr. EMIL **MÜLLER,** o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Technische Uebungsaufgaben für darstellende Geometrie. 6. Heft. Verlag Franz Deuticke, Leipzig und Wien. Preis 1,20 *M.*

THEODOR **SCHMID,** o. ö. Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. Zweite vermehrte und verbesserte Aufl. Verlag von Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1925. Preis 3 *M.*

Dr. WALTER **SCHMIDT,** a. o. Professor der Montanistischen Hochschule in Leoben. Gesteinsumformung. Mit 12 Abb. im Text und 1 Tafel. Denkschriften des Naturhistorischen Museums in Wien. Bd. 3. Verlag von Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1925. 64 S. Preis 8,40 *M.*

Dr. A. **WEDEMEYER,** Tafeln zur Funkortung. Mit 1 Zeichnung. Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt E. V. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1925. VIII + 146 S. Preis geb. 12 *M.*

NACHRICHTEN

Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik. In diesem Jahre feiert das Crellesche Journal mit einem eben erschienenen Jubiläumsband seinen hundertjährigen Bestand. Es wurde im Jahre 1826 von dem Geh. Oberbaurat Dr. August Leopold Crelle, der ein hervorragender Techniker und Organisator des technischen Unterrichts in Preußen war, begründet. Crelle, der der mathematischen Forschung lebhaftes Interesse entgegenbrachte, hatte die Absicht, ein alle Gebiete der reinen und angewandten Mathematik umfassendes Publikationsorgan, etwa in dem Sinne des alles umspannenden Arbeitsgebiets von Gauß zu schaffen. Es gelang ihm auch, in den ersten Jahren diesem Ziele nahe zu kommen. Allein die mächtige Entwicklung der reinen Mathematik, die in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts in Deutschland unter Weierstraß, Kummer u. a. einsetzte, brachte es mit sich, daß die Zeitschrift sich mehr der einen Seite ihres Programms zuwandte und von einer Berücksichtigung der Anwendungen mehr und mehr entfernte. Als dann später die große Blütezeit der reinen Mathematik in Deutschland verklungen war und allmählich in ein Epigonentum überging, fanden die Herausgeber nicht mehr die Kraft, sich den fruchtbaren Anregungen, die von der Physik und der Technik ausgingen, anzupassen. So wurde das Crellesche Journal zum Vertreter einer Richtung, die selbst innerhalb der reinen Mathematik als eine besonders abstrakte und den Anwendungen fernstehende bezeichnet werden muß. Bei der großen Verbreiterung des wissenschaftlichen Lebens kann man wohl verstehen, daß auch für eine Zeitschrift dieser besonderen Arbeitsrichtung Raum vorhanden ist. Allein die Herausgeber sollten vielleicht das hundertjährige Jubiläum zum Anlaß nehmen, den Titel der Zeitschrift mit ihrem Inhalt in Einklang zu bringen, den Titel, der in seiner jetzigen Gestalt nur eine Falschmeldung ist und geeignet erscheint, die Interessen anderer zu stören. Die Wertschätzung und allgemeine Achtung, deren sich das Crellesche Journal in der gesamten wissenschaftlichen Welt erfreut, würde dadurch nur wachsen. Mises. 743

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Die Berliner Ortsgruppe hielt am 29. Oktober 1926 die erste Sitzung des neuen Geschäftsjahres ab. Es sprach Hr. Dr. M. Schilhansl-München über »Gleichgewicht mehrfach gelochter Platten mit Anwendung auf die Berechnung der Lokomotivfeuerkiste«. Dem Vortrage, der beifällig aufgenommen wurde, folgte eine lebhafte Aussprache.

Am 3. Dezember spricht Hr. Dr. H. Fromm-Berlin über »Rollbewegung unter Berücksichtigung der Deformierbarkeit des rollenden Körpers«.

In Göttingen wird in den nächsten Tagen auf Antrag von 15 Mitgliedern, der vom Vorstand genehmigt wurde, eine neue Ortsgruppe der Gesellschaft errichtet.

Der gesamte Mitgliederstand beträgt am 20. November 278.

Der neue Jahresbericht samt Mitgliederverzeichnis gelangt in diesen Tagen zur Versendung. 744

Persönliches. Hr. Privatdozent Dr. E. Schwerin ist zum nicht beamteten a. o. Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg ernannt worden. 744

In Göttingen wurde kürzlich Herr Privatdozent Dr. A. Nádai zum nicht beamteten a. o. Professor an der Universität ernannt.

In Wien starb am 30. Oktober Herr Hofrat und Universitätsprofessor Dr. E. Blaschke im Alter von 70 Jahren. Er war einer der hervorragendsten Vertreter der mathematischen Statistik in Theorie und Praxis. Eine eingehende Beurteilung seiner Leistungen gibt E. Fanta in der Oesterreichischen Revue für Versicherung und Volkswirtschaft vom 22. November 1926.

(Redaktionsschluß 30. November 1926.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 6 :: Dezember 1926

:: Heft 6 :: Seite 429 bis 512



INHALT:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7